

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
Національний авіаційний університет

ЦИФРОВА ОБРОБКА СИГНАЛІВ

**Методичні рекомендації
до виконання практичних завдань
для студентів напрямів підготовки
6.050801 «Мікро- та наноелектроніка» і
6.050802 «Електронні прилади та системи»**

Київ 2012

УДК 004.383.3(076.5)
ББК 3 811.722я7
Ц 752

Укладачі: І. Ф. Бойко, Є. С. Іваницький

Рецензент І. Г. Прокопенко

Затверджено методично-редакційною радою Національного авіаційного університету (протокол № від).

Цифрова обробка сигналів: Методичні рекомендації до виконання практичних завдань.
Ц 752 / Уклад.: І. Ф. Бойко, Є. С. Іваницький. – К.: НАУ, 2014. – 45 с.

Уміщує сім практичних занять, присвячених дослідженню лінійних дискретних систем (ЛДС) в часовій та частотній областях, розглядаються статистичний аналіз проходження дискретних випадкових сигналів через лінійні системи, досліджуються шуми квантування в системах цифрової обробки сигналів (ЦОС). Вивчаються методи та особливості синтезу СІХ-фільтрів і НІХ-фільтрів, висвітлюються алгоритми адаптивної обробки сигналів.

Для студентів напрямів підготовки 6.050801 "Мікро- та наноелектроніка" і 6.050802 "Електронні пристрої та системи".

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 1

ЧАСОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛДС

Мета: Ознайомитись з поняттям та означеннями часових характеристик лінійних дискретних систем (ЛДС).

Задачі: 1. Засвоїти на практиці методи обчислення імпульсної характеристики ЛДС.

2. Засвоїти на практиці методи обчислення перехідної характеристики ЛДС.

3. Засвоїти методи аналізу ЛДС на основі часових характеристик та різницевих рівнянь.

Задача 1.1. Лінійна дискретна система описується різницеvim рівнянням виду:

$$2\nabla^2 y(n) + 3\nabla y(n) + 2y(n) = \nabla^2 x(n) + 2\nabla x(n) + x(n), \quad (1.1)$$

Де $x(n)$ – відлік вхідного сигналу в момент часу n ; $y(n)$ – відлік вихідного сигналу в момент часу n ; n – нормований час.

Знайти алгоритм роботи такої системи, її імпульсну та перехідну характеристики. Дослідити стійкість системи.

Розв'язок. 1. Знайдемо алгоритм роботи заданої ЛДС. Для цього скористаємось означенням оператора приросту назад дискретної функції

$$\nabla y(n) = y(n) - y(n-1) \quad (1.2)$$

і перепишемо рівняння (1.1) в дещо іншому вигляді. Окрім того, врахуємо, що оператор приросту назад другого порядку в розгорнутому вигляді можна записати так:

$$\begin{aligned} \nabla^2 y(n) &= \nabla[\nabla(y(n))] = \nabla[y(n) - y(n-1)] = \nabla y(n) - \nabla y(n-1) = \\ &= y(n) - y(n-1) - [y(n-1) - y(n-2)] = y(n) - 2y(n-1) + y(n-2). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Аналогічно для вхідного сигналу

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1) \quad (1.4)$$

і

$$\nabla^2 x(n) = x(n) - 2x(n-1) + x(n-2). \quad (1.5)$$

Підставимо вирази (1.2) – (1.5) в різницеve рівняння (1.1)

$$\begin{aligned} 2y(n) - 4y(n-1) + 2y(n-2) + 3y(n) - 3y(n-1) + 2y(n) = \\ = x(n) - 2x(n-1) + x(n-2) + 2x(n) - 2x(n-1) + x(n). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Зводимо подібні члени в (1.6)

$$7y(n) - 7y(n-1) + 2y(n-2) = 4x(n) - 4x(n-1) + x(n-2).$$

Розв'язавши останнє рівняння відносно значення вихідного сигналу $y(n)$ в момент часу n , отримаємо алгоритм роботи ЛДС у такому вигляді:

$$y(n) = \frac{4}{7}x(n) - \frac{4}{7}x(n-1) + \frac{1}{7}x(n-2) + y(n-1) + \frac{2}{7}y(n-2). \quad (1.7)$$

Отже, згідно з (1.7), алгоритм роботи даної ЛДС полягає в наступному: вихідний відгук системи $y(n)$ в момент часу n формується шляхом додавання з відповідними ваговими коефіцієнтами вхідного сигналу в той же момент часу $x(n)$ і двох минулих його значень $x(n-1)$ і $x(n-2)$, а також двох минулих значень вихідного сигналу $y(n-1)$ і $y(n-2)$.

Згідно з алгоритмом (1.7) структурна схема ЛДС має вигляд, зображений на рис. 1.1.

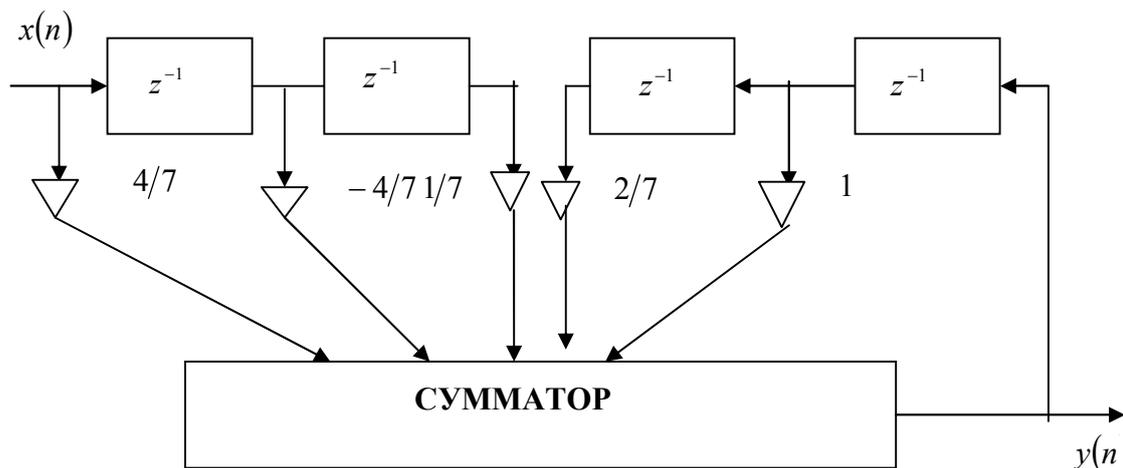


Рис. 1.1. Структурна схема ЛДС з алгоритмом роботи (1.7)

2. Знайдемо тепер імпульсну характеристику заданої в умові задачі ЛДС. Згідно з означенням, імпульсною характеристикою ЛДС є її реакція на дію одиничного імпульсу $\delta(n)$, коли система знаходиться в нульовому стані, тобто має нульові початкові умови.

Одиничний імпульс є свого роду тестуючим сигналом, який визначається наступним співвідношенням: Z

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Щоб знайти імпульсну характеристику ЛДС $\{h(n)\}$, будемо підставляти в алгоритм роботи системи (1.7) в якості вхідного сигналу $x(n)$ одиничний імпульс $\delta(n)$ (1.8). В цьому випадку відгук системи за означенням є імпульсна характеристика системи і тому в формулі (1.7) замість $y(n)$ будемо писати $h(n)$. Таким чином можна записати

$$h(n) = \frac{4}{7}\delta(n) - \frac{4}{7}\delta(n-1) + \frac{1}{7}\delta(n-2) + h(n-1) + \frac{2}{7}h(n-2), \quad (1.9)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Використовуючи (1.9), розрахуємо кілька перших значень імпульсної характеристики. При $n = 0$ маємо

$$h(0) = \frac{4}{7} \cdot 1 - \frac{4}{7} \cdot 0 + \frac{1}{7} \cdot 0 + 0 + \frac{2}{7} \cdot 0 = \frac{4}{7}.$$

Тут враховано, що зсунуті у часі тестуючі одиничні імпульси, які можуть бути означені виразами

$$\delta(n-1) = \begin{cases} 1, & n=1, \\ 0, & n \neq 1 \end{cases} \quad \text{і} \quad \delta(n-2) = \begin{cases} 1, & n=2, \\ 0, & n \neq 2 \end{cases} \quad (1.10)$$

дорівнюють нулеві при $n=0$. Дві останні складові в (1.9) при $n=0$ можна записати так: $h(n-1)=h(-1)$ і $h(n-2)=h(-2)$, тобто вони представляють собою відгуки ЛДС у моменти часу $n=-1$ і $n=-2$, тобто в ті моменти часу, коли на її вході відсутній вплив і, враховуючи, що система знаходиться в нульовому стані та принцип причинності, дорівнюють нулеві.

При $n=1$, розмірковуючи аналогічно, отримаємо

$$h(1) = \frac{4}{7}\delta(1) - \frac{4}{7}\delta(1-1) + \frac{1}{7}\delta(1-2) + h(1-1) + \frac{2}{7}h(1-2). \quad (1.11)$$

Оскільки за означенням тестового імпульсу $\delta(1)=0$ і $\delta(-1)=0$ (див. формулу (1.8)) і згідно з принципом причинності $h(1-2)=h(-1)=0$, то для (1.11) отримаємо

$$h(1) = \frac{4}{7} \cdot 0 - \frac{4}{7} \cdot 1 + \frac{1}{7} \cdot 0 + \frac{4}{7} \cdot 1 + \frac{2}{7} \cdot 0 = 0.$$

Розрахунки імпульсної характеристики при інших значеннях n виконуються аналогічно. Їх значення зведені до табл. 1.1.

Таблиця 1.1

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$h(n)$	0,5714	0	0,306	0,306	0,3936	0,481	0,5935	0,731	0,9	1,11	1,367	1,684

На рис. 1.2 зображено графік імпульсної характеристики ЛДС.

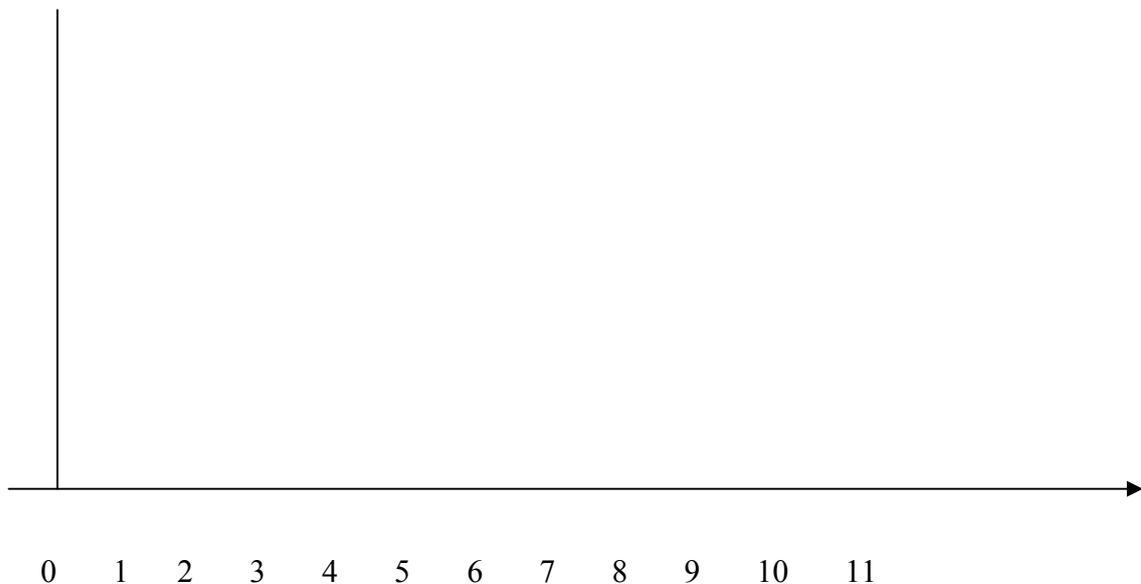


Рис. 1.2. Імпульсна характеристика ЛДС

Згадаємо тепер, що в часовій області критерієм стійкості ЛДС є збіжність суми ряду, утвореного зі значень її імпульсної характеристики, тобто

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(n) < \infty. \quad (1.12)$$

Оскільки для нашого прикладу імпульсна характеристика, починаючи зі значення $h(3)$ (див. табл. 1.1), монотонно зростає, то, очевидно, що умова (1.12) не виконується і ЛДС, що описується різницеvim рівнянням (1.1), не є стійкою.

3. Розрахуємо перехідну характеристику заданої в умові задачі ЛДС. Перш за все згадаємо, що перехідною характеристикою ЛДС є її відгук на дію тестового сигналу у вигляді дискретного одиничного стрибка

$$\sigma(n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } n < 0, \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.13)$$

Звичайно, при цьому система повинна знаходитись в нульовому стані.

Задачу знаходження перехідної характеристики можна розв'язувати таким же методом, як і для імпульсної характеристики. Для цього для різних дискретних моментів часу¹ $n = 0, 1, 2, \dots$ слід підставити в вираз, що описує алгоритм роботи ЛДС, (1.7) замість вхідного сигналу $x(n)$ тестовий сигнал (1.13). Тоді реакція системи і буде представляти собою шукану перехідну характеристику $g(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ЛДС.

Але можна зробити і по іншому. Можна скористатись результатами попередніх розрахунків, виконаних для імпульсної характеристики. Справа в тому, що між тестовими сигналами (1.8) і (1.13) існує певний зв'язок, який зображується наступними формулами:

$$\delta(n) = \nabla \sigma(n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.14)$$

і

$$\sigma(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.15)$$

У відповідності зі співвідношеннями (1.14) і (1.15) можна записати аналогічні співвідношення і для імпульсної та перехідної характеристик ЛДС:

$$h(n) = \nabla g(n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

і

$$g(n) = \sum_{k=-\infty}^n h(k), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.16)$$

Оскільки для фізично існуючих систем при всіх від'ємних значеннях n імпульсна характеристика $h(n) = 0$, то формулу (1.16) можна записати так:

¹ Від'ємні моменти часу не розглядаються, оскільки ЛДС задовольняє умовам фізичної реалізованості (згідно з принципом причинності для реальних фізичних об'єктів) і на від'ємній часовій вісі її перехідна характеристика дорівнює нулеві.

$$g(n) = \sum_{k=0}^n h(k), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.17)$$

Отже, скориставшись результатами, наведеними в табл. 1.1 та формулою (1.17), отримаємо значення перехідної характеристики. Для $n = 0$ маємо

$$g(0) = \sum_{k=0}^0 h(k) = h(0) = \frac{4}{7}.$$

Для $n = 1$ отримаємо

$$g(1) = \sum_{k=0}^1 h(k) = h(0) + h(1) = \frac{4}{7} + 0 = \frac{4}{7}.$$

Для $n = 2$ знаходимо

$$g(2) = \sum_{k=0}^2 h(k) = h(0) + h(1) + h(2) = \frac{4}{7} + 0 + 0,306 \approx 0,877.$$

Для $n = 3$ маємо

$$g(3) = \sum_{k=0}^3 h(k) = h(0) + h(1) + h(2) + h(3) = \frac{4}{7} + 0 + 0,306 + 0,306 \approx 0,918.$$

Наступні значення перехідної характеристики розраховуються аналогічно. Результати розрахунків зведено до табл. 1.2.

Таблиця 1.2

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$g(n)$	0,5714	0,5714	0,877	0,918	1,3116	1,7926	2,3861	3,1171	4,0171	5,1271	6,4941	8,1781

На рис. 1.3 зображено графік перехідної характеристики ЛДС.

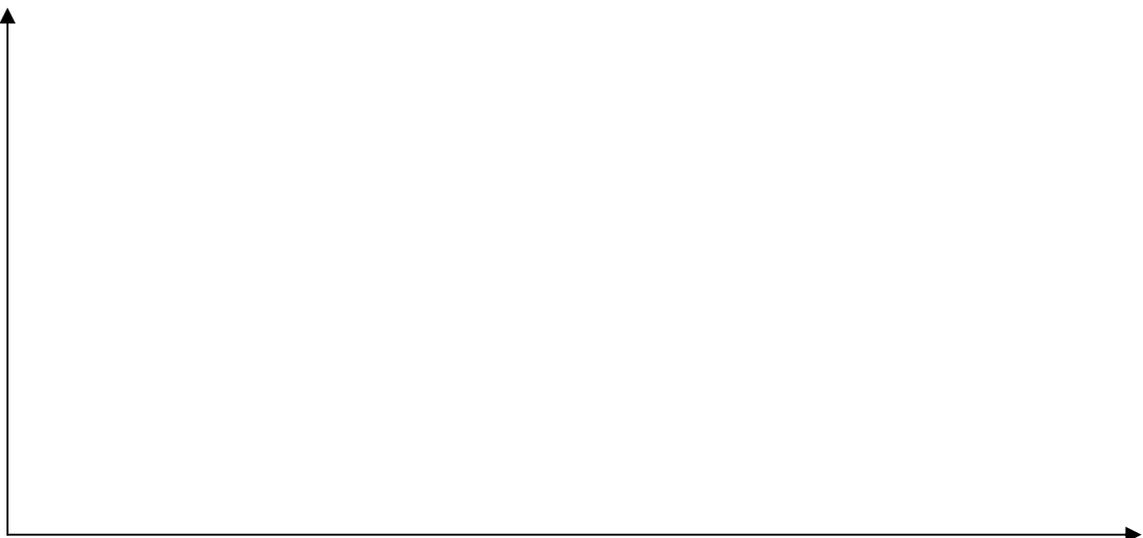


Рис. 1.3. Перехідна характеристика ЛДС

Задача 1.2. Нерекурсивна ЛДС має імпульсну характеристику, продану в табл. 1.3.

Таблиця 1.3

n	0	1	2	3	4	5
$h(n)$	2	1	0,5	0,1	0,05	0,01

На вході такої системи діє дискретний сигнал $x(n)$ у вигляді трикутного імпульсу, зображеного на рис. 1.4.

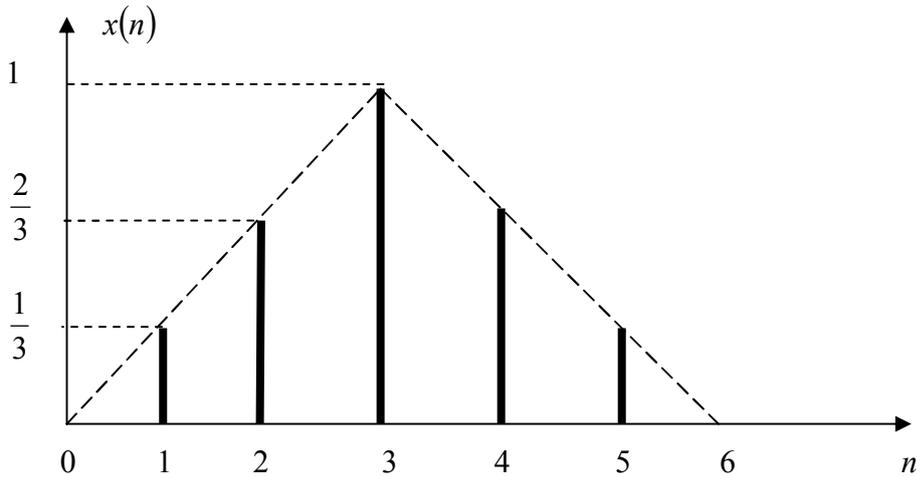


Рис. 1.4. Дискретний трикутний імпульс

Знайти реакцію ЛДС на такий сигнал, використовуючи поняття імпульсної та перехідної характеристик системи.

Розв'язок. 1. Якщо відомі імпульсна характеристика $h(n)$ ЛДС і сигнал $x(n)$ на її вході, то реакція на виході (див. рис. 1.5)

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n h(n-k)x(k), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.18)$$

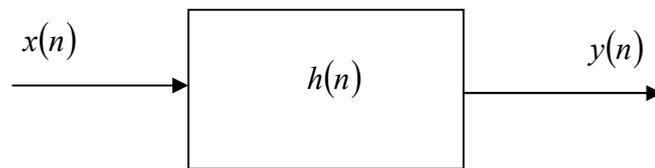


Рис. 1.5. Умовне зображення ЛДС

Використовуючи формулу (1.18) та дані про імпульсну характеристику ЛДС (див. табл. 1.3) і вхідний сигнал (див. рис. 1.4), розрахуємо значення вихідного сигналу $y(n)$. Почнемо з моменту часу $n = 0$:

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^0 h(0-k)x(k) = \dots + h(7)x(-7) + h(6)x(-6) + h(5)x(-5) + h(4)x(-4) + h(3)x(-3) + \\ + h(2)x(-2) + h(1)x(-1) + h(0)x(0).$$

Враховуючи, що імпульсна характеристика скінчена, тобто при $n > 5$, $h(n) = 0$, і відліки сигналу при від'ємних значеннях n теж дорівнюють нулеві, останній вираз можна переписати так:

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^0 h(0-k)x(k) = \dots + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0,01 \cdot 0 + 0,05 \cdot 0 + 0,1 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0 + 1,0 \cdot 0 + 2,0 \cdot 0 = 0.$$

Для моменту часу $n = 1$ маємо

$$y(1) = \sum_{k=-\infty}^1 h(1-k)x(k) = \dots + h(8)x(-7) + h(7)x(-6) + h(6)x(-5) + h(5)x(-4) + h(4)x(-3) + \\ + h(3)x(-2) + h(2)x(-1) + h(1)x(0) + h(0)x(1) = 1,0 \cdot 0 + 2,0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Для моменту часу $n = 2$ отримаємо

$$y(2) = \sum_{k=-\infty}^2 h(2-k)x(k) = \dots + h(9)x(-7) + h(8)x(-6) + h(7)x(-5) + h(6)x(-4) + h(5)x(-3) + \\ + h(4)x(-2) + h(3)x(-1) + h(2)x(0) + h(1)x(1) + h(0) \cdot x(2) = 0,5 \cdot 0 + 1,0 \cdot \frac{1}{3} + 2,0 \cdot \frac{2}{3} = 1 \frac{2}{3}.$$

Подальші розрахунки значень відліків реакції ЛДС виконуються аналогічним чином. Кожне наступне значення відліку вихідного сигналу, згідно з формулою (3.18), розраховується шляхом «розвороту» в дзеркальному порядку відносно вісі ординат і зсуву імпульсної характеристики ЛДС вправо по вісі часу на один інтервал дискретизації, перемножування її значень зі значеннями вхідного сигналу (який залишається на вісі часу непорушним) та складання отриманих добутків. Оскільки і сигнал, і імпульсна характеристика є скінченими дискретними функціями у часі, то вказаний вище процес має теж скінчену кількість кроків і закінчується після того, коли при черговому зсуві вправо імпульсної характеристики вона перестає «перекриватися» з сигналом. В нашому прикладі таке «перекриття» припиняється, коли, після «розвороту» в дзеркальному порядку, імпульсна характеристика зміщується праворуч на 12 інтервалів дискретизації. Це означає, що при $n \geq 12$ значення відгуку $y(n) = 0$.

Отримані вказаним вище способом значення відгуку ЛДС зведені до табл. 1.4.

Таблиця 1.4

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$y(n)$	0	$\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$	$2\frac{5}{6}$	2,7	$\frac{4}{15}$	$\frac{241}{300}$	$\frac{87}{300}$	$\frac{23}{300}$	$\frac{7}{300}$	$\frac{1}{300}$	0	0

На рис. 1.6 зображено графік дискретного вихідного сигналу.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 2

ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛДС

Мета: Ознайомитись на практиці з поняттями та означеннями системної функції та частотного коефіцієнта передачі лінійних дискретних систем (ЛДС).

Задачі: 1. Засвоїти на практиці методи обчислення системної функції ЛДС.

2. Засвоїти на практиці методи обчислення частотного коефіцієнта передачі ЛДС, а також амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) та фазочастотної характеристики (ФЧХ).

3. Засвоїти методи аналізу ЛДС на основі частотних характеристик ЛДС.

Задача 2.1. Алгоритм роботи лінійної дискретної системи описується співвідношенням, що має вигляд:

$$y(n) = x(n) - 0,2x(n-1) + 0,2y(n-1) + y(n-2) - 0,1y(n-3). \quad (2.1)$$

Знайти системну функцію такої ЛДС, карту нулів та полюсів, частотний коефіцієнт передачі та побудувати зображення АЧХ і ФЧХ.

Розв'язок. 1. Знайдемо системну функцію заданої ЛДС. Для цього запишемо z -перетворення лівої і правої частин співвідношення (2.1).

$$Y(z) = X(z) - 0,2z^{-1}X(z) + 0,2z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) - 0,1z^{-3}Y(z).$$

Звідси системна функція

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 0,2z^{-1}}{1 - 0,1z^{-1} + z^{-2}}. \quad (2.2)$$

Знайдемо нулі і полюси системної функції. Почнемо з нулів. Для цього прирівнюємо чисельник у правій частині співвідношення (2.2) нулеві і отримуємо рівняння

$$1 + 0,2z^{-1} = 0 \quad \text{або} \quad z + 0,2 = 0.$$

Отже ЛДС, що розглядається, має один дійсний нуль

$$z_0 = -0,2.$$

Далі, для знаходження полюсів, прирівнюємо нулеві знаменник системної функції

$$1 - 0,1z^{-1} + z^{-2} = 0.$$

Отримуємо рівняння

$$z^2 - 0,1z + 1 = 0,$$

розв'язавши яке, знаходимо значення полюсів

$$z_{p_1, p_2} = \frac{0,1 \pm \sqrt{0,01 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2}.$$

Таким чином ЛДС має два комплексно спряжені полюси

$$z_{p_1} = 0,05 + i0,5\sqrt{3,99} \quad \text{і} \quad z_{p_2} = 0,05 - i0,5\sqrt{3,99}.$$

На рис. 1.1 зображена комплексна z -площина та карта полюсів і нулів ЛДС, що розглядається.

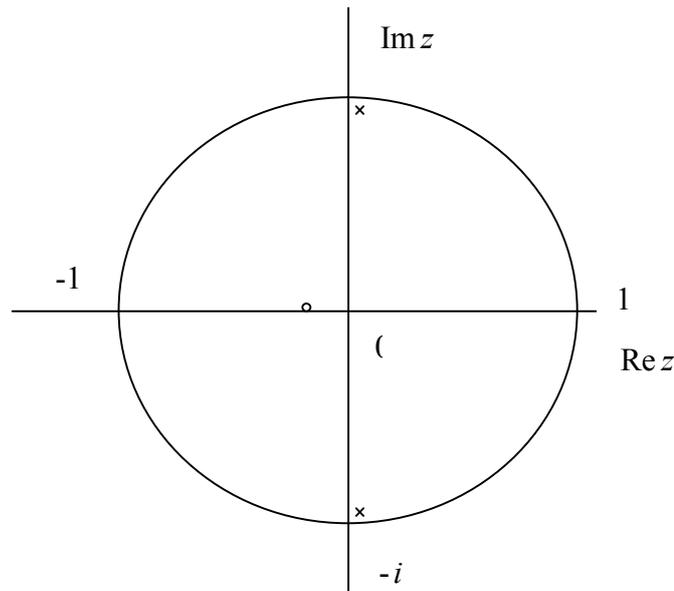


Рис. 1.1. Карта нулів та полюсів ЛДС

Як видно з рис 1.1, полюси ЛДС знаходяться на z -площині в межах одиничного кола, тобто модулі полюсів $|z_{p_1}| < 1$ і $|z_{p_2}| < 1$. А це означає, згідно з критерієм стійкості ЛДС у комплексній z -площині, що система, яка розглядається в задачі, є стійкою. Більше того, оскільки нуль $z_o = -0,2$ лежить теж в межах одиничного кола, то ЛДС є мінімально фазовою.

2. Перейдемо тепер до розрахунку частотного коефіцієнта передачі ЛДС. Для цього достатньо зробити заміну змінної $z = e^{i\omega\Delta}$ у формулі для системної функції (2.2). Маємо

$$\dot{K}(\omega) = H(z) \Big|_{z=\exp(i\omega\Delta)} = \frac{1 + 0,2e^{-i\omega\Delta}}{1 - 0,1e^{-i\omega\Delta} + e^{-i2\omega\Delta}}, \quad (2.3)$$

де ω - кругова частота; Δ - інтервал дискретизації у часі або відстань між сусідніми дискретними значеннями вхідного сигналу ЛДС.

Враховуючи те, що

$$e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha,$$

праву частину співвідношення (2.3) перепишемо так:

$$\dot{K}(\omega) = \frac{1 + 0,2 \cos \omega\Delta - i0,2 \sin \omega\Delta}{1 - 0,1 \cos \omega\Delta + \cos 2\omega\Delta + i(0,1 \sin \omega\Delta - \sin 2\omega\Delta)} = \frac{A_+(\omega) + iB_+(\omega)}{A_-(\omega) + iB_-(\omega)}, \quad (2.4)$$

де

$$A_+(\omega) = 1 + 0,2 \cos \omega\Delta \quad - \text{дійсна частина, а}$$

$$B_+(\omega) = -0,2 \sin \omega\Delta \quad - \text{уявна частина чисельника}$$

і

$$A_-(\omega) = 1 - 0,1 \cos \omega\Delta + \cos 2\omega\Delta \quad - \text{дійсна частина, а}$$

$$B_-(\omega) = 0,1 \sin \omega\Delta - \sin 2\omega\Delta \quad - \text{уявна частина знаменника в співвідношенні (2.4).}$$

На основі введених позначень знаходимо модуль частотного коефіцієнта передачі

$$\begin{aligned}
|\dot{K}(\omega)| &= \sqrt{\frac{A_+^2(\omega) + B_+^2(\omega)}{A_\zeta^2(\omega) + B_\zeta^2(\omega)}} = \\
&= \sqrt{\frac{(1 + 0,2 \cos \omega\Delta)^2 + (0,2 \sin \omega\Delta)^2}{(1 - 0,1 \cos \omega\Delta + \cos 2\omega\Delta)^2 + (0,1 \sin \omega\Delta - \sin 2\omega\Delta)^2}} = \\
&= \sqrt{\frac{1,04 + 0,4 \cos \omega\Delta}{2,01 - 0,4 \cos \omega\Delta + 2 \cos 2\omega\Delta - 0,1 \cos 3\omega\Delta}}, \quad -\infty < \omega < \infty,
\end{aligned}$$

що і буде зображати собою АЧХ лінійної дискретної системи, що розглядається. Зображення розрахованої АЧХ показано на рис. 1.2. Як бачи-

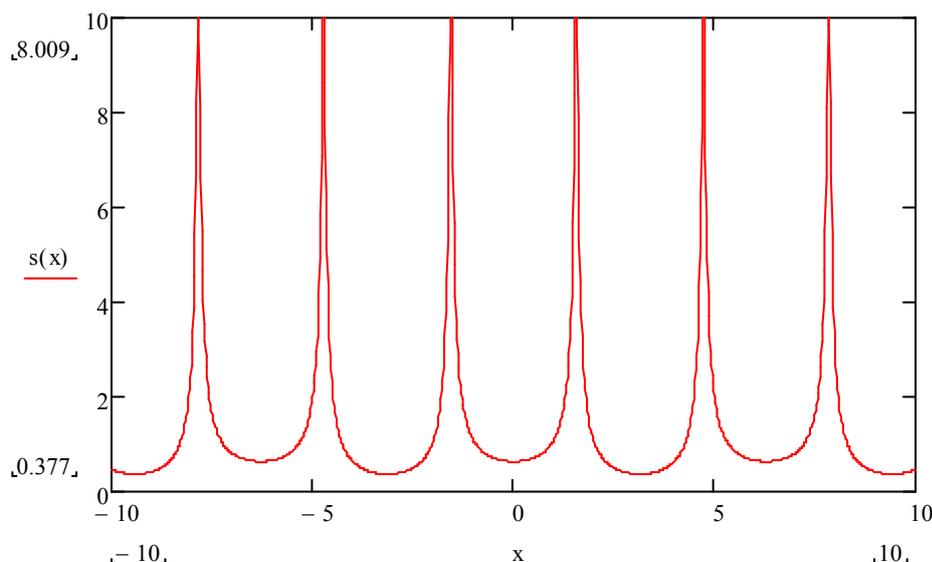


Рис. 1.2. Амплітудно-частотна характеристика ЛДС

мо, АЧХ лінійної дискретної системи є періодична функція частоти. Період її Ω визначається інтервалом дискретизації Δ , а саме

$$\Omega = \omega_a = \frac{2\pi}{\Delta}, \quad (2.5)$$

де ω_a - частота дискретизації. Отже період АЧХ дискретної системи співпадає з частотою дискретизації.

Фазочастотна характеристика – це аргумент частотного коефіцієнта передачі $\dot{K}(\omega)$. Враховуючи зображення останнього у вигляді формули (2.4), отримуємо

$$\begin{aligned}
\Theta(\omega) &= \arg \dot{K}(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{B_+(\omega)}{A_+(\omega)} - \operatorname{arctg} \frac{B_\zeta(\omega)}{A_\zeta(\omega)} = \\
&= -\operatorname{arctg} \frac{0,2 \sin \omega\Delta}{1 + 0,2 \cos \omega\Delta} - \operatorname{arctg} \frac{0,1 \sin \omega\Delta - \sin 2\omega\Delta}{1 - 0,1 \cos \omega\Delta + \cos 2\omega\Delta}, \quad (2.6) \\
&\quad -\infty < \omega < \infty.
\end{aligned}$$

Це і буде ФЧХ лінійної дискретної системи, що розглядається в задачі. Вона теж, як і АЧХ, для ЛДС є періодичною функцією частоти. Її період визначається тією ж формулою, що і для АЧХ, а саме співвідношенням (2.5). На рис. 1.3 наведено зображення ФЧХ (2.6).

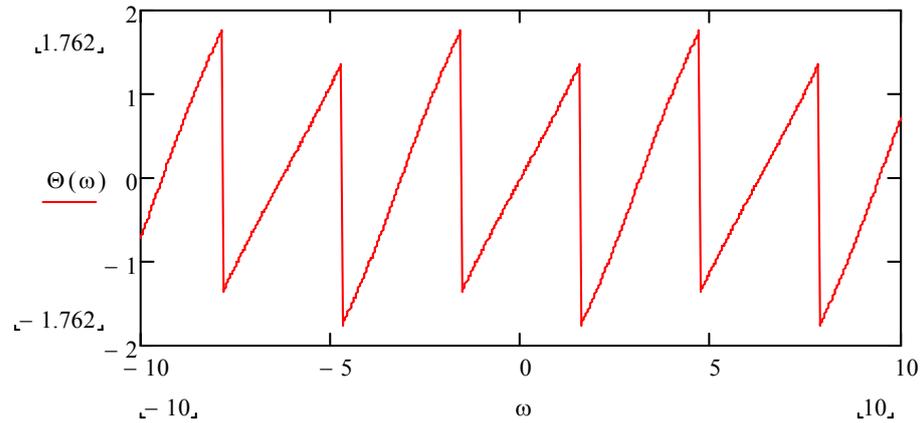


Рис. 1.3. Фазочастотна характеристика ЛДС

На основі отриманих виразів для ФЧХ і ФЧХ можна записати зображення частотного коефіцієнта передачі ЛДС у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{K}(\omega) &= |\dot{K}(\omega)| e^{i\Theta(\omega)} = \sqrt{\frac{1,04 + 0,4 \cos \omega\Delta}{2,01 - 0,4 \cos \omega\Delta + 2 \cos 2\omega\Delta - 0,1 \cos 3\omega\Delta}} \times \\ &\times \exp \left\{ -i \left(\operatorname{arctg} \frac{0,2 \sin \omega\Delta}{1 + 0,2 \cos \omega\Delta} + \operatorname{arctg} \frac{0,1 \sin \omega\Delta - \sin 2\omega\Delta}{1 - 0,1 \cos \omega\Delta + \cos 2\omega\Delta} \right) \right\}, \\ &-\infty < \omega < \infty. \end{aligned}$$

Задача 2.2. На ЛДС, алгоритм роботи якої має наступний вигляд:

$$y(n) = x(n) + y(n-1) - 0,5y(n-2),$$

діє дискретний експоненційний сигнал

$$x(n) = \begin{cases} 2e^{-0,1n}, & \hat{\text{ê}}\hat{\text{ê}} \quad n \geq 0, \\ 0, & \hat{\text{ê}}\hat{\text{ê}} \quad n < 0, \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Знайти реакцію ЛДС $y(n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ на дію такого сигналу.

Розв'язок. Такого типу задача відноситься до задач аналізу систем, тобто відомий вхідний вплив і характеристика системи чи алгоритм її роботи. Потрібно знайти реакцію системи. Для лінійних систем у багатьох випадках таку задачу слід розв'язувати із використанням представлення і вхідного сигналу і характеристики системи в частотній області. Отже спочатку нам слід знайти спектральне зображення вхідного сигналу та частотний коефіцієнт передачі ЛДС.

1. Використовуючи дискретне перетворення Фур'є, знаходимо спектр вхідного сигналу²

$$\dot{X}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-i\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2e^{-0,1n} e^{-i\omega n} = \frac{2}{1 - e^{-(0,1+i\omega)}}, \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (2.7)$$

² При знаходженні суми використана формула для суми членів нескінченної геометричної прогресії

$$S = \frac{b_1}{1 - q},$$

де b_1 - перший член прогресії, а q - її знаменник.

Спектр дискретного сигналу є періодичною функцією частоти ω , що наочно проілюстровано на рис. 1.4, де зображено амплітудно-частотний спектр вхідного сигналу, який за означенням представляє собою модуль спектру (2.7), тобто

$$|\dot{X}(\omega)| = X(\omega) = \frac{2}{\sqrt{(1 - e^{-(0,1+i\omega)})(1 - e^{-(0,1-i\omega)})}} = \frac{2}{\sqrt{1 + e^{-0,2} - 2e^{-0,1} \cos \omega}}, \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (2.8)$$

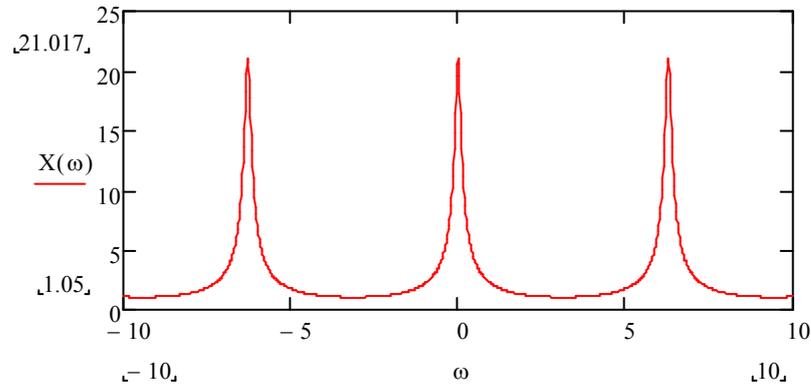


Рис. 1.4. Амплітудно-частотний спектр вхідного сигналу

Розглянемо знаменник в правій частині співвідношення (2.7):

$$1 - e^{-(0,1+i\omega)}.$$

Використовуючи формулу Ейлера, перепишемо цей вираз так:

$$1 - e^{-0,1} e^{-i\omega} = 1 - e^{-0,1} \cos \omega + i e^{-0,1} \sin \omega.$$

Тоді аргумент $\dot{X}(\omega)$ (2.7), що представляє собою фазочастотний спектр вхідного сигналу

$$\Psi(\omega) = \arctg \frac{0}{2} - \arctg \frac{e^{-0,1} \sin \omega}{1 - e^{-0,1} \cos \omega} = -\arctg \frac{\sin \omega}{e^{0,1} - \cos \omega}, \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (2.9)$$

Використовуючи тепер вирази для амплітудно-частотного спектру (2.8) і фазочастотного спектру (2.9) спектр вхідного сигналу можна записати у такому вигляді

$$\begin{aligned} \dot{X}(\omega) &= |\dot{X}(\omega)| e^{i\Psi(\omega)} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 + e^{-0,2} - 2e^{-0,1} \cos \omega}} \exp\left(-i \arctg \frac{\sin \omega}{e^{0,1} - \cos \omega}\right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

2. Далі знаходимо частотний коефіцієнт передачі ЛДС. Для цього спочатку запишемо алгоритм роботи ЛДС на основі z -перетворення, тобто

$$Y(z) = X(z) + z^{-1}Y(z) - 0,5z^{-2}Y(z).$$

Звідси системна функція

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - z^{-1} + 0,5z^{-2}}.$$

Виконавши в останньому співвідношенні заміну змінної $z = e^{i\omega\Delta}$, отримаємо частотний коефіцієнт передачі

$$\dot{K}(\omega) = \frac{1}{1 - e^{-i\omega\Delta} + 0,5e^{-i2\omega\Delta}}, \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (2.11)$$

Амплітудно-частотну характеристику ЛДС знаходимо як модуль правої частини співвідношення (2.11)

$$\begin{aligned} |\dot{K}(\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{(1 - e^{-i\omega\Delta} + 0,5e^{-i2\omega\Delta})(1 - e^{i\omega\Delta} + 0,5e^{i2\omega\Delta})}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2,25 - 3\cos\omega\Delta + \cos 2\omega\Delta}}, \quad -\infty < \omega < \infty. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Фазочастотна характеристика представляє собою аргумент правої частини співвідношення (2.11). Щоб знайти цю характеристику, розкладемо комплексну функцію в знаменнику правої частини співвідношення (2.11) на дійсну і уявну частини. Маємо

$$\begin{aligned} 1 - e^{-i\omega\Delta} + 0,5e^{-i2\omega\Delta} &= 1 - \cos\omega\Delta + i\sin\omega\Delta + 0,5\cos 2\omega\Delta - i\sin 2\omega\Delta = \\ &= (1 - \cos\omega\Delta + 0,5\cos 2\omega\Delta) + i(\sin\omega\Delta - 0,5\sin 2\omega\Delta). \end{aligned}$$

Тепер можемо записати вираз для фазочастотної характеристики ЛДС

$$\Theta(\omega) = \arctg \frac{0}{1} - \arctg \frac{\sin\omega\Delta - 0,5\sin 2\omega\Delta}{1 - \cos\omega\Delta + 0,5\cos 2\omega\Delta} = -\arctg \frac{\sin\omega\Delta - 0,5\sin 2\omega\Delta}{1 - \cos\omega\Delta + 0,5\cos 2\omega\Delta}, \quad (2.13)$$

$-\infty < \omega < \infty.$

На основі співвідношень (2.12) і (2.13) для частотного коефіцієнта передачі (2.11) можемо записати

$$\begin{aligned} \dot{K}(\omega) &= |\dot{K}(\omega)|e^{i\Theta(\omega)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2,25 - 3\cos\omega\Delta + \cos 2\omega\Delta}} \exp\left(-i\arctg \frac{\sin\omega\Delta - 0,5\sin 2\omega\Delta}{1 - \cos\omega\Delta + 0,5\cos 2\omega\Delta}\right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

$-\infty < \omega < \infty.$

3. Запишемо тепер, використовуючи вирази (2.10) і (2.14), формулу для спектру сигналу на виході ЛДС

$$\begin{aligned} \dot{Y}(\omega) &= \dot{X}(\omega)\dot{K}(\omega) = |\dot{X}(\omega)| \cdot |\dot{K}(\omega)|e^{i\Psi(\omega)}e^{i\Theta(\omega)} = |\dot{X}(\omega)| \cdot |\dot{K}(\omega)|e^{i(\Psi(\omega)+\Theta(\omega))} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 + e^{-0,2} - 2e^{-0,1}\cos\omega}} \frac{1}{\sqrt{2,25 - 3\cos\omega\Delta + \cos 2\omega\Delta}} \times \\ &\times \exp\left[-i\left(\arctg \frac{\sin\omega}{e^{0,1} - \cos\omega} + \arctg \frac{\sin\omega\Delta - 0,5\sin 2\omega\Delta}{1 - \cos\omega\Delta + 0,5\cos 2\omega\Delta}\right)\right], \end{aligned}$$

$-\infty < \omega < \infty.$

Перемноживши множники перед експонентою, отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{Y}(\omega) &= \frac{2}{\sqrt{(2,75 + 2,25e^{-0,2}) - (3,5 + 4,5e^{-0,1} + 3e^{-0,2})\cos\omega + (1,5 + e^{-0,2})\cos 2\omega - 0,5\cos 3\omega}} \times \\ &\times \exp\left[-i\left(\arctg \frac{\sin\omega}{e^{0,1} - \cos\omega} + \arctg \frac{\sin\omega\Delta - 0,5\sin 2\omega\Delta}{1 - \cos\omega\Delta + 0,5\cos 2\omega\Delta}\right)\right], \end{aligned} \quad (2.15)$$

$-\infty < \omega < \infty.$

Згідно з (2.15), амплітудно-частотний спектр вихідного сигналу

$$|\dot{Y}(\omega)| = \frac{2}{\sqrt{(2,75 + 2,25e^{-0,2}) - (3,5 + 4,5e^{-0,1} + 3e^{-0,2})\cos\omega + (1,5 + e^{-0,2})\cos 2\omega - 0,5\cos 3\omega}},$$

$-\infty < \omega < \infty,$

а фазочастотний спектр

$$\Xi(\omega) = \exp \left[-i \left(\operatorname{arctg} \frac{\sin \omega}{e^{0,1} - \cos \omega} + \operatorname{arctg} \frac{\sin \omega \Delta - 0,5 \sin 2\omega \Delta}{1 - \cos \omega \Delta + 0,5 \cos 2\omega \Delta} \right) \right],$$

$$-\infty < \omega < \infty.$$

На основі отриманих виразів (2.16) і (2.17), побудовані зображення АЧС і ФЧС вихідного сигналу ЛДС (рис. 1.5 і рис. 1.6 відповідно).

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 3

АНАЛІЗ ДІЇ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ НА ЛДС

Мета: Засвоїти на практиці методи опису та стохастичного аналізу дії дискретних випадкових сигналів на лінійні дискретні системи.

Основні завдання: 1. За заданими імовірнісними характеристиками вхідного дискретного сигналу (математичне сподівання, дисперсія, кореляційна функція, енергетичний спектр або функція чи щільність розподілу ймовірностей) і характеристиками ЛДС (імпульсна характеристика, частотний коефіцієнт передачі чи структурна схема) знайти ймовірнісні характеристики сигналу на виході системи.

Задача 3.1. На нерекурсивну стаціонарну ЛДС, подану своєю структурною схемою (рис. 3.1) діє дискретний сигнал $x(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, який представляє собою відрізок дискретного стаціонарного випадкового процесу

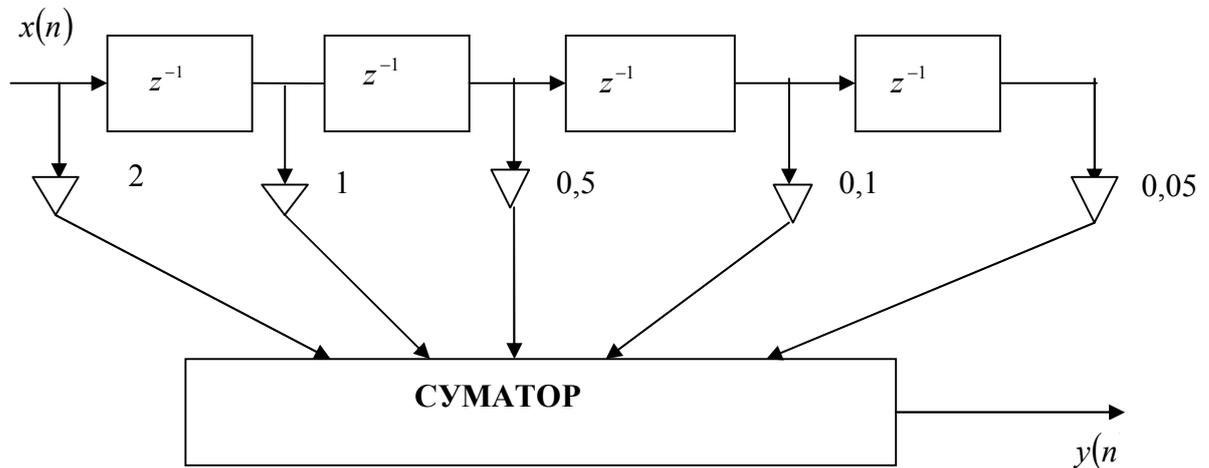


Рис. 3.1. Структурна схема нерекурсивної ЛДС

$\xi(n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, що описується нормальним двовимірним розподілом зі щільністю ймовірностей

$$p_{\xi}(x_1, x_2; k) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\xi}^2\sqrt{1-r_{\xi}^2(k)}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{\xi}^2[1-r_{\xi}^2(k)]}\left[(x_1 - a_{\xi})^2 - 2r_{\xi}(k)(x_1 - a_{\xi})(x_2 - a_{\xi}) + (x_2 - a_{\xi})^2\right]\right\},$$

$$-\infty < x_1, x_2 < \infty,$$

де σ_{ξ}^2 - дисперсія дискретного випадкового процесу; a_{ξ} - математичне сподівання дискретного випадкового процесу; $r_{\xi}(k)$ - коефіцієнт кореляції дискретного випадкового процесу; k - відстань між двома відліками випадкового процесу (чи його реалізації $x(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$), тобто $k = 0, 1, 2, \dots$

На виході ЛДС (див. рис. 3.1) маємо реалізацію $y(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ випадкового процесу $\eta(n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, яка є реакцією системи на дію на її вході реалізації $x(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Для виконання числових розрахунків покладемо, що дисперсія $\sigma_\xi^2 = 4$, середнє $a_\xi = 1$ і коефіцієнт кореляції

$$r_\xi(k) = e^{-0,5|k|}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Необхідно знайти двовимірну щільність розподілу ймовірностей вихідного випадкового процесу $\eta(n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ та його енергетичний спектр.

Розв'язок. Перш за все слід зазначити, що випадкові величини з нормальним розподілом стійкі до лінійних перетворень. Це означає, що коли на вході лінійної дискретної системи діє випадковий сигнал з нормальним розподілом, то відгук також буде представляти собою випадковий процес з нормальним розподілом, але уже з іншими параметрами: математичним сподіванням, дисперсією та кореляційною функцією (коефіцієнтом кореляції). Таким чином, на виході заданої стаціонарної ЛДС будемо мати теж стаціонарний випадковий процес $\eta(n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ з двовимірною щільністю розподілу ймовірностей

$$p_\eta(y_1, y_2; k) = \frac{1}{2\pi\sigma_\eta^2\sqrt{1-r_\eta^2(k)}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\eta^2[1-r_\eta^2(k)]}\left[(y_1 - a_\eta)^2 - 2r_\eta(k)(y_1 - a_\eta)(y_2 - a_\eta) + (y_2 - a_\eta)^2\right]\right\}, \\ -\infty < y_1, y_2 < \infty,$$

де σ_η^2 - дисперсія дискретного випадкового процесу на виході; a_η - математичне сподівання вихідного дискретного випадкового процесу; $r_\eta(k)$ - коефіцієнт кореляції дискретного випадкового процесу на виході. Для завершення розв'язку задачі стохастичного аналізу залишається знайти значення математичного сподівання a_η , дисперсії σ_η^2 та вираз для коефіцієнта кореляції $r_\eta(k)$ відгуку ЛДС.

Запишемо формальне співвідношення між процесами стаціонарної ЛДС на вході і виході

$$\eta(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\xi(n-k), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.1)$$

де $h(k)$ - імпульсна характеристика стаціонарної ЛДС. Звідси математичне сподівання відгуку ЛДС

$$a_\eta = M\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\xi(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)M[\xi(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)a_\xi = a_\xi \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k). \quad (3.2)$$

Таким чином, для знаходження математичного сподівання a_η потрібно знати імпульсну характеристику ЛДС $h(k)$. Як відомо, імпульсна

характеристика нерекурсивної ЛДС є скінченою. Для її визначення слід подати на вхід ЛДС одиничний імпульс

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

При цьому система повинна знаходитись в нульовому стані.

Для ЛДС, зображеної на рис. 3.1, при проходженні одиничного сигналу (3.3) отримуємо значення відгуку, які і будуть представляти собою імпульсну характеристику:

$$\begin{cases} n = 0; & h(0) = 2,0; \\ n = 1; & h(1) = 1,0; \\ n = 2; & h(2) = 0,5; \\ n = 3; & h(3) = 0,1; \\ n = 4; & h(4) = 0,05. \end{cases} \quad (3.4)$$

Підставимо значення імпульсної характеристики (3.4) в співвідношення (3.2) і отримуємо значення математичного сподівання відгуку ЛДС:

$$a_\eta = 1(2 + 1 + 0,5 + 0,1 + 0,05) = 3,65. \quad (3.5)$$

Розглянемо тепер кореляційну функцію відгуку ЛДС

$$R_\eta(m) = M\{(\eta(n) - a_\eta)(\eta(n+m) - a_\eta)\}.$$

Підставимо сюди вирази для відгуку (3.1) і математичного сподівання (3.2). Тоді можемо записати

$$\begin{aligned} R_\eta(m) &= \\ &= M\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\xi(n-k) - a_\xi \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\xi(n+m-k) - a_\xi \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\right)\right] = \\ &= M\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)(\xi(n-k) - a_\xi)\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)(\xi(n+m-k) - a_\xi)\right)\right] = \\ &= M\left[\sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h(k_1)h(k_2)(\xi(n-k_1) - a_\xi)(\xi(n+m-k_2) - a_\xi)\right] = \\ &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h(k_1)h(k_2)M(\xi(n-k_1) - a_\xi)(\xi(n+m-k_2) - a_\xi) = \\ &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h(k_1)h(k_2)R_\xi(m+k_1-k_2), \end{aligned} \quad (3.6)$$

де $R_\xi(m+k_1-k_2) = M(\xi(n-k_1) - a_\xi)(\xi(n+m-k_2) - a_\xi)$ – автокореляційна функція вхідного процесу ЛДС.

Враховуючи співвідношення між автокореляційною функцією $R_\xi(k)$ і коефіцієнтом кореляції $r_\xi(k)$, можемо записати

$$R_\xi(k) = \sigma_\xi^2 r_\xi(k).$$

Підставимо в останнє співвідношення значення дисперсії вхідного процесу σ_ξ^2 і коефіцієнта кореляції $r_\xi(k)$ і отримуємо, що

$$R_\xi(k) = 4e^{-0,5|k|}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.7)$$

З використанням формули (3.7) вираз для автокореляційної функції $R_\eta(m)$ вихідного процесу $\eta(n)$ ЛДС перепишемо так:

$$R_\eta(m) = 4 \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h(k_1)h(k_2) e^{-0,5|m+k_1-k_2|}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.8)$$

Враховуючи, що імпульсна характеристика ЛДС є скінчена (див. формулу (3.4)), то нескінченні суми в (3.8) можна замінити на скінчені, тобто остаточно можна записати

$$R_\eta(m) = 4 \sum_{k_1=0}^4 \sum_{k_2=0}^4 h(k_1)h(k_2) e^{-0,5|m+k_1-k_2|}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.9)$$

Якщо покласти в співвідношенні (3.9) $m = 0$, то отримаємо вираз для дисперсії вихідного процесу

$$R_\eta(m) \Big|_{m=0} = \sigma_\eta^2 = 4 \sum_{k_1=0}^4 \sum_{k_2=0}^4 h(k_1)h(k_2) e^{-0,5|k_1-k_2|}. \quad (3.10)$$

Підставивши в праву частину співвідношення (3.10) числові значення імпульсної характеристики ЛДС із (3.4), знайдемо числове значення дисперсії вихідного процесу

$$\sigma_\eta^2 = 37,32308. \quad (3.11)$$

Розділивши праву частину співвідношення (3.8) на отримане значення дисперсії, знайдемо вираз для коефіцієнта кореляції вихідного процесу

$$r_\eta(m) = 0,107 \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h(k_1)h(k_2) e^{-0,5|m+k_1-k_2|}. \quad (3.12)$$

На основі отриманих значень математичного сподівання (3.5), дисперсії (3.11) і виразу коефіцієнта кореляції (3.12) двовимірну щільність розподілу вихідного процесу остаточно запишемо так:

$$p_\eta(y_1, y_2; k) = \frac{1}{\pi \cdot 74,64616 \sqrt{1 - \left(0,107 \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h(k_1)h(k_2) e^{-0,5|k+k_1-k_2|} \right)^2}} \times$$

$$\times \exp \left\{ - \frac{(y_1 - 3,65)^2 - \left(0,214 \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h(k_1)h(k_2) e^{-0,5|k+k_1-k_2|} \right) (y_1 - 3,65)(y_2 - 3,65) + (y_2 - 3,65)^2}{74,64616 \left[1 - \left(0,107 \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h(k_1)h(k_2) e^{-0,5|k+k_1-k_2|} \right)^2 \right]} \right\},$$

$$-\infty < y_1, y_2 < \infty,$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 4

ШУМИ КВАНТУВАННЯ В ЦИФРОВИХ СИСТЕМАХ

Мета: Ознайомитись з означеннями та методами опису шумів квантування в системах ЦОС і засвоїти на практиці особливості їх стохастичного аналізу.

Основні завдання: 1. Виконати запис заданих чисел в різних системах числення, подати їх у формі з фіксованою та з плаваючою комою. 2. Представити задані числа в трьох основних кодах: прямий, обернений та додатковий. 3. Для заданого цифрового фільтра виконати імовірнісний аналіз шумів квантування.

Задача 4.1. Подані в десятковій системі числення (СЧ) п'ять чисел

$$A_{1(10)} = 15; \quad A_{2(10)} = 21,25; \quad A_{3(10)} = 0,57421875; \quad A_{4(10)} = 3,75; \quad A_{5(10)} = 8,95,$$

де перший індекс означає номер числа, а другий у дужках позначає СЧ, записати у двійковій, вісімковій та шістнадцятковій системах числення з фіксованою та плаваючою комою.

Розв'язок. 1. Почнемо з представлення чисел з фіксованою комою (природна форма запису), яка відповідає звичайній формі запису. При зображенні чисел з фіксованою комою положення коми фіксується у певному місці відносно розрядів чисел. Зазвичай вважають, що кома знаходиться або перед старшим розрядом, або після молодшого. У першому випадку це дробові числа, у другому – цілі числа.

1.1. Спочатку виконаємо запис наведених в умові задачі чисел у двійковій СЧ. Основа двійкової СЧ дорівнює 2. Символи двійкової СЧ: 0 і 1 (див. додаток 1).

Детально розглянемо представлення числа $A_{1(10)} = 15$ в двійковій СЧ в формі з фіксованою комою. Для цього згадаємо правило переведення числа із одної СЧ в іншу. Нехай потрібно деяке число A , записане в СЧ з основою m , перевести в число, записане в СЧ з основою n . Якщо число A ціле, то воно ділиться на нову основу n . Отриманий при цьому залишок, в тому числі і нульовий, зображає собою молодшу цифру числа A в СЧ з основою n . Цілу частину від першого ділення знову ділять на нову основу n . Отриманий залишок зображає собою наступну після молодшої цифру числа A в СЧ з основою n . Далі процес ділення продовжується аналогічним чином. Процес ділення зупиняється на тому кроці, коли в результаті ділення отримаємо число, значення якого буде меншим основи n . Це число буде зображати собою старшу цифру числа A в СЧ з основою n .

Отже, враховуючи це правило, ділимо число $A_{1(10)} = 15$ на 2. На першому кроці маємо

$$15 : 2 = 7(\text{ціла частина}) + 1(\text{залишок}).$$

На другому кроці знаходимо

$$7 : 2 = 3(\text{ціла частина}) + 1(\text{залишок}).$$

Третій крок дає такий результат:

$$3 : 2 = 1(\text{ö}^3\text{èà ÷ àñð\text{è}íà}) + 1(\text{çà\text{è}\text{è}\text{ø}í\text{ê}}).$$

На третьому кроці отримали від ділення число 1, яке за значенням є меншим 2, що є основою двійкової СЧ. Тому на цьому кроці ділення закінчується. Таким чином в двійковій СЧ число $A_{1(10)} = 15 = 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$ запишеться так:

$$A_{1(2)} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1111.$$

Розглянемо наступне число $A_{2(10)} = 21,25$. Це число містить дробову частину. Її переведення в іншу СЧ відрізняється від розглянутого вище правила для цілої частини. Нехай потрібно дробову частину числа, записаного в СЧ з основою m , перевести в дробову частину числа, записаного в СЧ з основою n . Для цього дробову частину, записану в СЧ з основою m , множать на число n . Ціла частина числа, отриманого від такого множення, зображає собою першу шукану цифру. Дробова ж частина знову множиться на число n . Ціла частина після другого множення зображає собою наступну шукану цифру, а дробову частину знову множимо на n і діємо аналогічним чином. Процес множення продовжується до того моменту, коли в результаті отримуємо ціле число без дробової частини. Отримане ціле число буде представляти собою останню цифру в зображенні дробової частини вихідного числа в СЧ з основою n . Тут слід зауважити, що такий процес множення може продовжуватись і до нескінченності. Тоді, зупинившись на певному кроці множення, ми отримаємо наближене зображення дробової частини в новій СЧ з основою n . Точність такого зображення дробової частини повинна співпадати з точністю її зображення в СЧ з основою m .

Таким чином, для цілої частини числа $A_{2(10)} = 21,25$, в результаті ділення її на 2, маємо:

$$\frac{21}{2} = 10 + 1; \quad \frac{10}{2} = 5 + 0; \quad \frac{5}{2} = 2 + 1; \quad \frac{2}{2} = 1 + 0.$$

Тож можемо записати:

$$21_{(10)} = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 10101_{(2)}. \quad (4.1)$$

Для представлення дробової частини числа $A_{2(10)} = 21,25$ в двійковій СЧ, згідно з наведеним вище правилом, виконаємо множення дробового числа 0,25 в десятковій СЧ на 2. Маємо

$$\begin{aligned} 0,25 \cdot 2 &= 0,5 \quad (\text{ö}^3\text{èà ÷ àñð\text{è}íà} 0); \\ 0,5 \cdot 2 &= 1,0 \quad (\text{ö}^3\text{èà ÷ àñð\text{è}íà} 1). \end{aligned}$$

Оскільки на другому кроці в результаті множення отримали число з нульовою дробовою частиною, то на цьому етапі процедура множення закінчується і ми отримуємо зображення

$$0 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} = 0,25 = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 0,01. \quad (4.2)$$

Об'єднавши представлення в двійковій СЧ цілої частини (4.1) і дробової частини (4.2), отримаємо зображення в двійковій СЧ всього числа $A_{2(10)} = 21,25$, а саме

$$A_{2(2)} = 10101,01.$$

Виконавши аналогічні розрахунки, для інших чисел маємо:

$$A_{3(10)} = 0,57421875 \Leftrightarrow A_{3(2)} = 0,1001011;$$

$$A_{4(10)} = 3,75 \Leftrightarrow A_{4(2)} = 11,11;$$

$$A_{5(10)} = 8,95 \Leftrightarrow A_{5(2)} \approx 1000,11110011001.$$

Зауважимо, що для числа $A_{5(10)} = 8,95$ отримали наближене³ зображення в двійковій СЧ оскільки при переведенні дробової його частини процес множення на 2 має нескінченну протяжність. В даному випадку відносна похибка при такому наближенні становить менше 0,07%. Для підвищення точності наближення необхідно в зображенні дробової частини числа збільшити кількість значущих розрядів.

1.2. Розглянемо тепер представлення наведених в умові задачі чисел у вісімковій СЧ. Для числа $A_{1(10)} = 15$ маємо

$$15 : 8 = 1(\text{ö}^3\text{èà ÷ ãñð\text{e}i\text{à}}) + 7(\text{ç\text{a}è\text{è}\text{ø}i\text{è}}).$$

Ціла частина при першому ж діленні виявилася меншою основи СЧ 8. Отже процес ділення на цьому припиняється і маємо таке представлення числа $A_{1(10)} = 15$ в вісімковій СЧ

$$A_{1(8)} = 1 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = 17.$$

Для інших чисел маємо

$$A_{2(10)} = 21,25 \Leftrightarrow A_{2(8)} = 25,2;$$

$$A_{3(10)} = 0,57421875 \Leftrightarrow A_{3(8)} = 0,446;$$

$$A_{4(10)} = 3,75 \Leftrightarrow A_{4(8)} = 3,6;$$

$$A_{5(10)} = 8,95 \Leftrightarrow A_{5(8)} = 10,7(4631).$$

Зауважимо, що в останньому прикладі, в зображенні числа $A_{5(8)}$, застосовано загальноприйняте позначення для змішаних періодичних дробів. Це означає, що в дробовій частині числа $A_{5(8)}$ послідовність цифр 4631 нескінченно повторюється після цифри 7. Цю послідовність цифр називають періодом дробу.

1.3. Виконаємо переведення наведених в умові задачі чисел в шістнадцятково-ву СЧ. При діленні числа $A_{1(10)} = 15$ на 16 ціла частина відсутня (або дорівнює нулеві), а залишок дорівнює 15. Це й буде молодша (і єдина) цифра в зображенні числа, що розглядається, в шістнадцятковій СЧ. Згідно з додатком 2 в шістнадцятковій СЧ їй відповідає символ F . Отже можемо записати

$$A_{1(16)} = 15 \cdot 16^0 = F.$$

Розглянемо інші числа. Для числа $A_{2(10)} = 21,25$ спочатку ділимо на 16 цілу частину:

$$21 : 16 = 1(\text{ö}^3\text{èà ÷ ãñð\text{e}i\text{à}}) + 5(\text{ç\text{a}è\text{è}\text{ø}i\text{è}}).$$

³ За наявності часу, студентам можна запропонувати обчислити точність такого наближення.

Оскільки залишок менше значення основи 16, то на цьому ділення закінчується і для цілої частини числа $A_{2(10)} = 21,25$ ми можемо записати наступне зображення:

$$21(\text{äâñüðêîââ } \tilde{N} \times) \Leftrightarrow 1 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 = 15(\text{ø³ñòíäâöüð êîââ } \tilde{N} \times). \quad (4.3)$$

Для отримання зображення дробової частини числа $A_{2(10)} = 21,25$ виконаємо множення його на 16. Маємо

$$0,25 \cdot 16 = 4,0.$$

В результаті множення отримали ціле число. На цьому множення закінчуються, а для дробової частини можемо записати:

$$0,25(\text{äâñüðêîââ } \tilde{N} \times) \Leftrightarrow 4 \cdot 16^{-1} = 0,4(\text{ø³ñòíäâöüð êîââ } \tilde{N} \times). \quad (4.4)$$

Об'єднуючи зображення (4.3) і (4.4), отримуємо зображення числа $A_{2(10)} = 21,25$ в шістнадцятковій СЧ:

$$A_{2(16)} = 1 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 + 4 \cdot 16^{-1} = 15,4.$$

Виконуючи аналогічні дії з числами $A_{3(10)}$, $A_{4(10)}$ і $A_{5(10)}$, отримаємо для них такі зображення в шістнадцятковій СЧ:

$$A_{3(10)} = 0,57421875 \Leftrightarrow A_{3(16)} = 0,93;$$

$$A_{4(10)} = 3,75 \Leftrightarrow A_{4(16)} = 3, C;$$

$$A_{5(10)} = 8,95 \Leftrightarrow A_{5(16)} = 8, F(3).$$

2. Виконаємо тепер представлення чисел у формі з плаваючою комою. Таке представлення виконується за наступною формулою:

$$A_n = Mn^p, \quad (4.5)$$

де M – мантиса числа (дробове число); n – основа системи числення; p – порядок числа (ціле число).

В представленні (4.5) і мантиса M , і порядок p числа, записаного в формі з плаваючою комою, записуються в одній і тій же системі числення з основою n . Окрім того кожне з них зображується у звичайній формі, тобто з плаваючою комою.

Як правило числа в формі з плаваючою комою записують у нормалізованому вигляді. Це означає, що мантиса представляє собою дробове число за модулем менше одиниці записане в формі з фіксованою комою, після якої в дробовій частині перша цифра значуща. З цієї причини далі будемо розглядати представлення чисел в різних СЧ в формі з плаваючою комою в нормалізованому вигляді.

Перш за все перепишемо наведені в умові задачі числа в десятковій СЧ в формі з плаваючою комою. Розглянемо число $A_{1(10)} = 15$. Для мантиси цього числа в нормалізованому вигляді кому слід поставити перед цифрою 1, тобто

$$M_{1(10)} = 0,15, \quad (4.6)$$

де індекс означає, що це мантиса першого числа (в умові задачі), записана в десятковій СЧ.

Оскільки мантиса (4.6) відрізняється (менша) від самого числа $A_{1(10)} = 15$ в 100 раз, тобто

$$\frac{A_{1(10)}}{M_{1(10)}} = 100 = 10^2,$$

то можемо записати

$$A_{1(10)} = M_{1(10)} \cdot 10^2 = 0,15 \cdot 10^2.$$

Це і є представлення числа $A_{1(10)} = 15$ в нормалізованому вигляді в формі з плаваючою комою в десятковій СЧ. Отже згідно з формулою (4.5) в (4.7) мантиса $M_{1(10)} = 0,15$; основа СЧ $n = 10$; порядок числа $p = 2$.

Запишемо тепер інші числа, задані в умові задачі, в нормалізованому вигляді в формі з плаваючою комою в десятковій СЧ.

$$A_{2(10)} = 0,2125 \cdot 10^2;$$

$$A_{3(10)} = 0,57421875 \cdot 10^0;$$

$$A_{4(10)} = 0,375 \cdot 10^1;$$

$$A_{5(10)} = 0,895 \cdot 10^1.$$

2.1. Розглянемо представлення чисел в нормалізованому вигляді в формі з плаваючою комою в двійковій системі числення. Для цього скористаємось результатами п. 1.1. Для першого числа в формі з фіксованою комою маємо представлення $A_{1(2)} = 1111$. Перенісши кому вліво на чотири розряди, отримуємо значення мантиси $M_{1(2)} = 0,1111$. Тоді можемо записати шукане представлення числа:

$$A_{1(2)} = 0,1111 \cdot 2^{100},$$

де $p = 100$, порядок числа, записаний в двійковій системі числення.

Для інших чисел маємо:

$$A_{2(2)} = 0,1010101 \cdot 2^{101};$$

$$A_{3(2)} = 0,1001011 \cdot 2^0;$$

$$A_{4(2)} = 0,1111 \cdot 2^{10};$$

$$A_{5(2)} \approx 0,100011110011001 \cdot 2^{100}.$$

2.2. Розглянемо представлення чисел в нормалізованому вигляді в формі з плаваючою комою в вісімковій системі числення. Вище для першого числа отримали таке представлення його в вісімковій СЧ з фіксованою комою: $A_{1(8)} = 17$. Для отримання мантиси цього числа для зображення його в нормалізованому вигляді в формі з плаваючою комою потрібно перенести кому вліво на два розряди, тобто мантиса $M_{1(8)} = 0,17$. Тоді, згідно з формулою (4.5), отримуємо таке зображення:

$$A_{1(8)} = 0,17 \cdot 8^2,$$

де $p = 2$ – порядок числа.

Для наступних чотирьох чисел маємо такі зображення:

$$A_{2(8)} = 0,252 \cdot 8^2;$$

$$A_{3(8)} = 0,446 \cdot 8^0;$$

$$A_{4(8)} = 0,36 \cdot 8^1;$$

$$A_{5(8)} = 0,107(4631) \cdot 8^2.$$

2.3. Знову, використовуючи результати п. 1.3 та формулу (4.5), запишемо представлення чисел в нормалізованому вигляді в формі з плаваючою комою в шістнадцятковій системі числення. Маємо такі зображення чисел:

$$A_{1(16)} = 0, F \cdot 16^1;$$

$$A_{2(16)} = 0,154 \cdot 16^2;$$

$$A_{3(16)} = 0,93 \cdot 16^0;$$

$$A_{4(16)} = 0,3C \cdot 16^1;$$

$$A_{5(16)} = 0,8F \cdot 16^1.$$

Задача 4.2.

Додаток 1

Таблиця 4.1

Символи систем числення

Основа системи числення	Символи
2	0, 1
8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Додаток 2

Таблиця 4.2

Значення вагових коефіцієнтів двійкової системи числення

n	2^n	n	2^n
0	1	-1	0,5
1	2	-2	0,25
2	4	-3	0,125
3	8	-4	0,0625
4	16	-5	0,03125
5	32	-6	0,015625
6	64	-7	0,0078125
7	128	-8	0,00390625
8	256	-9	0,001953125
9	512	-10	0,0009765625
10	1 024	-11	0,00048828125
11	2 048	-12	0,000244140625
12	4 096	-13	0,0001220703125
13	8 192	-14	0,00006103515625

14	16 384	-15	0,000030517578125
15	32 768	-16	0,0000152587890625
16	65 536	-17	0,00000762939453125
17	131 072	-18	0,000003814697265625
18	262 144	-19	0,0000019073486328125
19	524 288	-20	0,00000095367431640625

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 5

СИНТЕЗ СІХ-ФІЛЬТРІВ

Мета: Ознайомитись з означеннями цифрового фільтра у вузькому та широкому розуміннях, особливостями синтезу цифрових фільтрів зі скінченою імпульсною характеристикою і засвоїти на практиці методи їх розрахунку.

Завдання: 1. Виконати синтез СІХ-фільтра з лінійною фазочастотною характеристикою за методом вікон.

2. Провести розрахунок оптимального смугового СІХ-фільтра за методом Чебишова.

Задача 5.1. Виконати синтез методом вікон цифрового фільтра низьких частот (ФНЧ), який має лінійну фазочастотну характеристику і скінчену імпульсну характеристику. Вихідні дані: частота зрізу смуги пропускання фільтра $f_c = 25$ кГц, частота дискретизації сигналу $F_a = 70$ кГц, ширина смуги переходу $\Delta F = 5$ кГц, нерівномірність у смузі пропускання 0,1 дБ, затухання в смузі придушення 60 дБ.

Розв'язок. Перш за все зауважимо, що синтез цифрового фільтра охоплює п'ять етапів.

1. *Специфікація фільтра.* На цьому етапі задається тип фільтра, вимоги до нього, параметри та характеристики.

2. *Обчислення коефіцієнтів фільтра.* Виконується тим чи іншим методом розрахунок коефіцієнтів системної функції фільтра або (що те ж саме) значень його імпульсної характеристики, яка б задовольняла умовам та вимогам специфікації.

3. *Вибір структури фільтра.* На даному етапі на основі отриманої системної функції (або перехідної характеристики для СІХ-фільтрів) виконується побудова структурної схеми фільтра.

4. *Аналіз наслідків скінченої розрядності зображення чисел.* Виконується оцінка наслідків, до яких призводить процес квантування сигналів та коефіцієнтів цифрового фільтра та при обробці цифрових сигналів.

5. *Реалізація.* На цьому етапі виконується побудова функціональної схеми фільтра, реалізується апаратна і (або) програмна його розробка.

Далі розв'язок задачі будемо вести поетапно. Перший етап по суті уже виконано, оскільки специфікація фільтра в повному обсязі висвітлена в умові задачі. Тому відразу переходимо до другого етапу.

Згідно з умовою задачі коефіцієнти фільтра будемо розраховувати на основі метода вікон або методу зважування. Саме вагові коефіцієнти і задаються відповідною дискретною функцією-вікном. Суть методу зводиться до наступного. Спочатку на основі ідеальної частотної характеристики $\dot{H}_i(\omega)$ цифрового ФНЧ (див. рис. 5.1), яка є періодичною функцією частоти ω ,

шляхом застосування оберненого перетворення Фур'є знаходиться ідеальна імпульсна характеристика

$$h_i(n) = \frac{\Delta}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Delta}}^{\frac{\pi}{\Delta}} H_i(\omega) e^{j\omega n \Delta} d\omega, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.1)$$

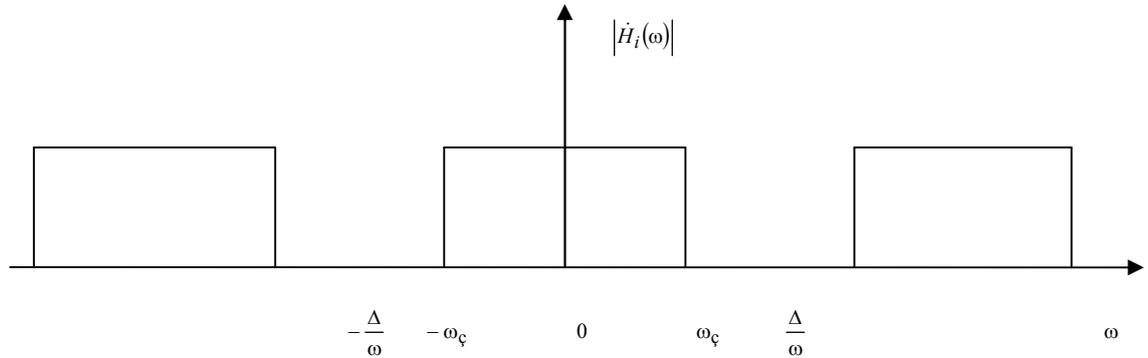


Рис. 5.1. Амплітудно-частотна характеристика ідеального ФНЧ

Враховуючи, що ідеальна частотна характеристика

$$H_i(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } -\frac{\pi}{\Delta} \leq \omega < \omega_c, \\ 1, & \text{якщо } -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c, \\ 0, & \text{якщо } \omega_c < \omega \leq \frac{\pi}{\Delta}. \end{cases}$$

то інтеграл в (5.1) можна переписати так:

$$h_i(n) = \frac{\Delta}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} H_i(\omega) e^{j\omega n \Delta} d\omega = \frac{\sin 2\pi \hat{f}_c n}{n\pi}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (5.2)$$

$$h_i(0) = 2\hat{f}_c,$$

де \hat{f}_c нормована частота зрізу, яка відрізняється від частоти зрізу f_c , що задана в умові задачі, і визначається співвідношенням

$$\hat{f}_c = \frac{f_c + \Delta F/2}{F_A} = \frac{25 + 2,5}{70} \approx 0,393.$$

Як випливає із формули (5.2), отримана ідеальна імпульсна характеристика $h_i(n)$ не задовольняє двом умовам реальних цифрових фільтрів. По-перше, вона має ненульові значення на від'ємній вісі часу, що не сумісне з умовою причинності реально існуючих фільтрів. По-друге, на додатній вісі часу імпульсна характеристика має нескінченну кількість значень, що заперечує означенню СІХ-фільтра, згідно з яким імпульсна характеристика останнього має бути скінченною. Тому для фільтра, що синтезується, ідеальна імпульсна характеристика $h_i(n)$ (5.2) повинна бути зрізана на від'ємній вісі часу повністю і на додатній вісі часу частково для $n > N$, де N - кількість ненульових відліків імпульсної характеристики СІХ-фільтра. Іншими словами, імпульсна характеристика $h(n)$ реального фільтра,

що розраховується, може бути отримана шляхом множення імпульсної характеристики $h_i(n)$ (5.2) на функцію-вікно $w(n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, тобто

$$h(n) = h_i(n)w(n). \quad (5.3)$$

Для вирізання імпульсної характеристики за формулою (5.3) будемо використовувати вікно Кайзера

$$w(n) = \begin{cases} \frac{I_0\left(\beta \left[1 - \left(\frac{2n}{N-1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right)}{I_0(\beta)}, & \text{якщо } -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}, \\ 0, & \text{якщо } n \notin \left[-\frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2}\right], \end{cases} \quad (5.4)$$

де $I_0(x)$ – модифікована функція Бесселя першого роду нульового порядку, β – параметр, від якого залежить швидкість спаду значень-функції вікна на краях інтервалу $\left[-\frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2}\right]$.

Розраховуємо параметри вікна (5.4) N і β . Згідно з умовою задачі нерівномірність у смузі пропускання фільтра дорівнює 0,1 дБ. Отже

$$20 \lg(1 + \delta_i) = 0,1 \text{ дБ.}$$

Розв'язуючи рівняння відносно δ_i , маємо $\delta_i = 0,0115$ (див. рис. 5.2).

Аналогічно, враховуючи, що в смузі придушення затухання $a = 60$ дБ, то

$$-20 \lg(\delta_i) = 60 \text{ дБ}$$

і

$$\delta_i = 0,001.$$

Отже затухання

$$\delta = \min(\delta_i, \delta_i) = 0,001.$$

Таке затухання вимагає для СІХ-фільтра, що проектується, а отже і для функції Кайзера, кількість коефіцієнтів

$$N \geq \frac{a - 7,95}{14,36 \frac{\Delta F}{F_a}} = \frac{60 - 7,95}{14,36 \frac{5}{70}} \approx 50,745.$$

Будемо вважати, що $N = 51$.

При затуханні $a \geq 50$ дБ параметр, що визначає величину пульсацій,
 $\beta = 0,1102(a - 8,7) = 0,1102(60 - 8,7) \approx 5,65$.

Оскільки розраховується ФНЧ з лінійною фазовою характеристикою, то коефіцієнти фільтра повинні задовольняти умові симетрії або асиметрії. Вибираємо перше. Таким чином при непарному $N = 51$ достатньо розрахувати лише 25 коефіцієнтів за наступною формулою:

$$h(n) = h_i(n)w(n) = \frac{\sin 2\pi\hat{f}_\zeta n}{n\pi} \frac{I_0\left(5,65\left[1 - \left(\frac{2n}{51-1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right)}{I_0(5,65)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 24$$

Внаслідок симетрії коефіцієнтів і непарності їх кількості ($N = 51$) найбільший коефіцієнт (центральный) з номером $n = 25$ розраховується так:

$$h(25) = h_i(0)w(0) = 2f_\zeta = 2 \cdot 0,393 = 0,786.$$

Результати розрахунків коефіцієнтів фільтра зведені до табл. 5.1.

Таблиця 5.1

$h(n)$	Значення коефіцієнтів	$h(N - n - 1)$
1	2	3
$h(0)$	$-1,59 \cdot 10^{-1}$	$h(50)$
$h(1)$	$-3,6 \cdot 10^{-2}$	$h(49)$
$h(2)$	$4,2 \cdot 10^{-2}$	$h(48)$
$h(3)$	$3,2 \cdot 10^{-2}$	$h(47)$
$h(4)$	$-1,4 \cdot 10^{-2}$	$h(46)$
$h(5)$	$-2,5 \cdot 10^{-2}$	$h(45)$
$h(6)$	$-2,828 \cdot 10^{-4}$	$h(44)$
$h(7)$	$1,9 \cdot 10^{-2}$	$h(43)$
$h(8)$	$7,666 \cdot 10^{-3}$	$h(42)$
$h(9)$	$-1,2 \cdot 10^{-2}$	$h(41)$
$h(10)$	$-1,1 \cdot 10^{-2}$	$h(40)$
$h(11)$	$5,054 \cdot 10^{-3}$	$h(39)$
$h(12)$	$1,1 \cdot 10^{-2}$	$h(38)$
$h(13)$	$2,509 \cdot 10^{-4}$	$h(37)$
$h(14)$	$-8,776 \cdot 10^{-3}$	$h(36)$
$h(15)$	$-3,781 \cdot 10^{-3}$	$h(35)$
$h(16)$	$5,691 \cdot 10^{-3}$	$h(34)$
$h(17)$	$5,414 \cdot 10^{-3}$	$h(33)$
$h(18)$	$-2,452 \cdot 10^{-3}$	$h(32)$
$h(19)$	$-5,348 \cdot 10^{-3}$	$h(31)$
$h(20)$	$-1,815 \cdot 10^{-4}$	$h(30)$
$h(21)$	$4,037 \cdot 10^{-3}$	$h(29)$
$h(22)$	$1,653 \cdot 10^{-3}$	$h(28)$
$h(23)$	$-2,063 \cdot 10^{-3}$	$h(27)$

1	2	3
$h(24)$	$-9,006 \cdot 10^{-4}$	$h(26)$
$h(25)$	$7,86 \cdot 10^{-1}$	$h(25)$

На рис. 5.3 зображена імпульсна характеристика фільтра, а на рис. 5.4 АЧХ фільтра та функція ослаблення.

Задача 5.2. Виконати синтез оптимального (за Чебишовим) смугового фільтра (СФ), який має лінійну фазочастотну характеристику і скінчену імпульсну характеристику. Вихідні дані: смуга пропускання фільтра $\tilde{f} = 12 - 16$ кГц, частота дискретизації сигналу $F_a = 96$ кГц, ширина смуги переходу $\Delta F = 3$ кГц, нерівномірність у смузі пропускання 0,01 дБ, затухання в смузі затримки 80 дБ.

Розв'язок. Зазначимо, що фільтр буде належати до класу оптимальних, якщо він задовольняє задану в умові задачі специфікацію за найменш можливого порядку N - кількості коефіцієнтів фільтра.

Як відомо, частотна характеристика фільтра $\dot{K}(\omega)$, як комплексна функція, може бути представлена в показниковій формі запису

$$\dot{K}(\omega) = |\dot{K}(\omega)|^{j\varphi(\omega)},$$

де $|\dot{K}(\omega)|$ - модуль частотної характеристики, що представляє собою амплітудно-частотну характеристику (АЧХ) фільтра, $\varphi(\omega)$ - аргумент частотної характеристики, що представляє собою фазочастотну характеристику (ФЧХ) фільтра.

Для фільтрів з лінійною фазовою характеристикою $\varphi(\omega)$ частотну характеристику зручно зображати у такому вигляді:

$$\dot{K}(\omega) = A(\omega)^{j\varphi(\omega)},$$

де $A(\omega)$ - амплітудна функція, яка в смузі пропускання фільтра має додатні значення і, отже, співпадає з АЧХ $|\dot{K}(\omega)|$, а в смузі затримки може бути як додатною, так від'ємною, тобто

$$|\dot{K}(\omega)| = \begin{cases} A(\omega) & \text{аєү } \omega, \text{ ùî } \text{íàëäæàðü ñìóç³ } \text{ïðíìõñèàíí } \text{ü,} \\ |A(\omega)| & \text{аєү } \omega, \text{ ùî } \text{íàëäæàðü ñìóç³ } \text{çàðððèèèè.} \end{cases}$$

Оскільки за умовою задачі необхідно синтезувати оптимальний фільтр за Чебишовим, то розв'язок, тобто апроксимацію амплітудної функції $A(\omega)$, будемо шукати в класі поліномів Чебишова

$$C_N(x) = \cos[N \arccos(x)], \quad x \in [-1, 1], \quad (5.5)$$

$$N = 0, 1, 2, \dots,$$

де N - порядок полінома. Наприклад, перші чотири поліноми мають наступний вигляд:

$$C_0(x) = 1,$$

$$C_1(x) = \cos[\arccos(x)] = x,$$

$$C_2(x) = \cos[2 \arccos(x)] = 2 \cos^2[\arccos(x)] - 1 = 2x^2 - 1,$$

$$C_3(x) = \cos[3 \arccos(x)] = 4 \cos^3[\arccos(x)] - 3 \cos[\arccos(x)] = 4x^3 - 3x, \dots$$

Для спрощення процедури отримання аналітичних виразів поліномів Чебишова вищих порядків існує рекурентна формула

$$C_{N+1}(x) = 2xC_N(x) - C_{N-1}(x).$$

Отже, амплітудна функція $A(\hat{\omega})$ при синтезі оптимального фільтра за Чебишовим буде зображуватися у вигляді зваженої суми перших M поліномів (5.5), тобто

$$A(\hat{\omega}, \bar{\alpha}) = \sum_{k=0}^M \alpha_k \cos(k\hat{\omega}) = \left. \begin{matrix} x = \cos \hat{\omega} \\ \hat{\omega} = \arccos x \end{matrix} \right| = \sum_{k=0}^M \alpha_k \cos[k \arccos(x)], \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (5.6)$$

де $\bar{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_M)$ - вектор вагових коефіцієнтів, $\hat{\omega} = \frac{\omega}{F_a}$ - нормована

частота, причому $-\pi \leq \hat{\omega} \leq \pi$.

Власне розрахунок оптимального фільтра зводиться до визначення вектора вагових коефіцієнтів $\bar{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_M)$ при мінімальному значенні M , таких, щоб похибка апроксимації

$$\max_{\hat{\omega} \in \Omega} w(\hat{\omega}) |K_i(\hat{\omega}) - A(\hat{\omega}, \bar{\alpha})| \Rightarrow \min_{\bar{\alpha}},$$

де $w(\hat{\omega})$ - вагова функція, яка «розподіляє» величину похибки між смугою пропускання та смугою затримки; $K_i(\hat{\omega})$ - ідеальна АЧХ, в даному випадку смугового фільтра (див. рис. 5.5); Ω - частотний інтервал апроксимації ідеальної АЧХ $K_i(\hat{\omega})$ функцією (5.6), який (див. рис. 5.5) запишеться у такому вигляді

$$\Omega = \Omega_{\text{пг}} \cup \Omega_{\text{нп}} \cup \Omega_{\text{пг}_2}.$$

Розв'язати таку задачу аналітично не можливо. Розв'язується ж вона чисельним шляхом за декілька кроків-ітерацій.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 6

СИНТЕЗ НІХ-ФІЛЬТРІВ

Мета: Ознайомитись з означенням та властивостями цифрових фільтрів з нескінченною імпульсною характеристикою (НІХ-фільтри) та особливостями їх синтезу. Засвоїти на практиці методи їх розрахунку.

Завдання: 1. Виконати синтез НІХ-фільтра методом інваріантності імпульсної характеристики.

2. Провести розрахунок НІХ-фільтра методом білінійного z -перетворення.

Задача 6.1. Виконати синтез НІХ-фільтра нижніх частот методом інваріантності імпульсної характеристики на основі аналогового фільтра-прототипа Баттерворта.

Вихідні умови:

- частота дискретизації $f_a = 2500$ Гц;

- гранична частота $f_{\text{ад}} = 750$ Гц;

- частота зрізу $f_{\text{сд}} = 500$ Гц;

- допустимі відхилення в смугах пропускання та затримки $\delta_1 = \delta_2 = 0,1$.

Розв'язок. 1. Оскільки метод розрахунку НІХ-фільтрів, який розглядається, ґрунтується на застосуванні фільтра-прототипа нижніх частот з нормованою частотою, то спочатку на основі поданих в умові задачі характеристик фільтра (див. рис. 6.1) шляхом реактансних перетворень частот знаходимо характеристики відповідного нормованого фільтра нижніх частот⁴ (ФНЧ).

Перехід від вихідного ФНЧ до нормованого ФНЧ здійснюється згідно з формулою

$$\hat{F} = \frac{f}{f_{\text{сд}}}, \quad (6.1)$$

де \hat{F} - нормована частота.

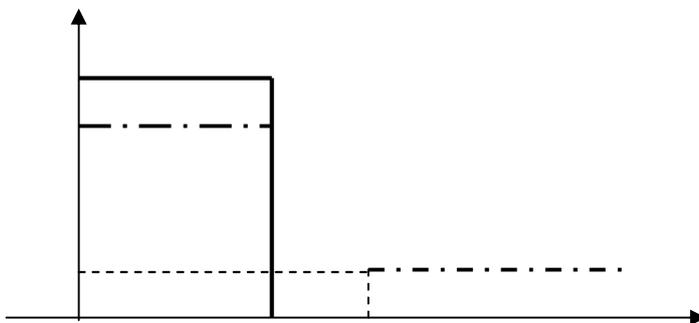
Таким чином, згідно з формулою (6.1), для нормованого ФНЧ маємо (див. рис. 6.2):

- частоту зрізу

$$\hat{F}_{\text{сд}} = \frac{f_{\text{сд}}}{f_{\text{сд}}} = 1;$$

- граничну частоту

$$\hat{F}_{\text{ад}} = \frac{f_{\text{ад}}}{f_{\text{сд}}} = \frac{750}{500} = 1,5.$$



⁴ Для зручності будемо позначати далі частоти, що відповідають вихідному ФНЧ, літерами f (або ω), а для нормованого ФНЧ - F (або Ω) з відповідними індексами або без них.

Рис. 6.1. Амплітудно-частотна характеристика ФНЧ

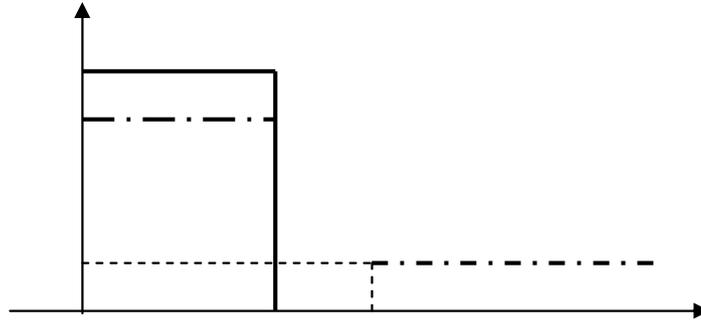


Рис. 6.2. Амплітудно-частотна характеристика нормованого ФНЧ

2. Розрахуємо тепер квадрат модуля функції передачі, тобто квадрат АЧХ, аналогового нормованого ФНЧ. Згідно з апроксимацією Баттерворта функція квадрату АЧХ N -го порядку нормованого ФНЧ має вигляд:

$$|\dot{K}(\hat{\Omega})|^2 = \frac{1}{1 + \hat{\Omega}^{2N}},$$

де $\hat{\Omega} = 2\pi\hat{F}$ - нормована кругова частота.

Щоб скористатись при розрахунках цією формулою, обчислимо значення N . Для цього застосуємо формулу

$$N \geq \frac{\lg C}{\lg \hat{F}_{\text{до}}},$$

де

$$C = \sqrt{\frac{10^{0,1a_{\min}} - 1}{10^{0,1a_{\max}} - 1}}.$$

На основі вихідних даних в умовах задачі знаходимо

$$a_{\min} = -20 \lg \delta_2 = -20 \lg(0,1) = 20$$

і

$$a_{\max} = -20 \lg(1 - \delta_1) = -20 \lg(1 - 0,1) = 0,915.$$

Тоді

$$C = \sqrt{\frac{10^{0,1 \cdot 20} - 1}{10^{0,1 \cdot 0,915} - 1}} = 20,546,$$

а для N знаходимо

$$N \geq \frac{\lg(20,546)}{\lg(1,5)} = 7,455.$$

Вибираємо найближче ціле число, що задовольняє умові останньої нерівності, тобто покладемо, що $N = 8$.

Отже квадрат АЧХ аналогового нормованого ФНЧ Баттерворта

$$|\dot{K}(\hat{\Omega})|^2 = \frac{1}{1 + \hat{\Omega}^{2 \cdot 8}}. \quad (6.2)$$

Перейшовши до p -площини, де комплексна змінна $p = \sigma + j\hat{\Omega}$, запишемо (6.2) у такому вигляді

$$|\dot{K}(p)|^2 = \frac{1}{1+p^{2,8}}. \quad (6.3)$$

Прирівнявши знаменник (6.3) до нуля, отримаємо рівняння для знаходження полюсів функції передачі

$$1+p^{16}=0.$$

Розв'язок цього рівняння

$$p_k = \sqrt[16]{-1} = \sqrt[16]{e^{j\pi}} = \sqrt[16]{e^{j(2k+1)\pi}}, \quad k=0,1,2,\dots,15. \quad (6.4)$$

Отже маємо 16 полюсів. Знайдемо їх значення із (6.4). Маємо

$$\begin{aligned} p_0 &= \sqrt[16]{e^{j\pi}} = e^{j\frac{\pi}{16}} = \cos\frac{\pi}{16} + j\sin\frac{\pi}{16} \approx 0,98 + j0,20; \\ p_1 &= \sqrt[16]{e^{j3\pi}} = e^{j\frac{3\pi}{16}} = \cos\frac{3\pi}{16} + j\sin\frac{3\pi}{16} \approx 0,83 + j0,56; \\ p_2 &= \sqrt[16]{e^{j5\pi}} = e^{j\frac{5\pi}{16}} = \cos\frac{5\pi}{16} + j\sin\frac{5\pi}{16} \approx 0,56 + j0,83; \\ p_3 &= \sqrt[16]{e^{j7\pi}} = e^{j\frac{7\pi}{16}} = \cos\frac{7\pi}{16} + j\sin\frac{7\pi}{16} \approx 0,20 + j0,98; \\ p_4 &= \sqrt[16]{e^{j9\pi}} = e^{j\frac{9\pi}{16}} = \cos\frac{9\pi}{16} + j\sin\frac{9\pi}{16} \approx -0,20 + j0,98; \\ p_5 &= \sqrt[16]{e^{j11\pi}} = e^{j\frac{11\pi}{16}} = \cos\frac{11\pi}{16} + j\sin\frac{11\pi}{16} \approx -0,56 + j0,83; \\ p_6 &= \sqrt[16]{e^{j13\pi}} = e^{j\frac{13\pi}{16}} = \cos\frac{13\pi}{16} + j\sin\frac{13\pi}{16} \approx -0,83 + j0,56; \\ p_7 &= \sqrt[16]{e^{j15\pi}} = e^{j\frac{15\pi}{16}} = \cos\frac{15\pi}{16} + j\sin\frac{15\pi}{16} \approx -0,98 + j0,20; \\ p_8 &= \sqrt[16]{e^{j17\pi}} = e^{j\frac{17\pi}{16}} = \cos\frac{17\pi}{16} + j\sin\frac{17\pi}{16} \approx -0,98 - j0,20; \\ p_9 &= \sqrt[16]{e^{j19\pi}} = e^{j\frac{19\pi}{16}} = \cos\frac{19\pi}{16} + j\sin\frac{19\pi}{16} \approx -0,83 - j0,56; \\ p_{10} &= \sqrt[16]{e^{j21\pi}} = e^{j\frac{21\pi}{16}} = \cos\frac{21\pi}{16} + j\sin\frac{21\pi}{16} \approx -0,56 - j0,83; \\ p_{11} &= \sqrt[16]{e^{j23\pi}} = e^{j\frac{23\pi}{16}} = \cos\frac{23\pi}{16} + j\sin\frac{23\pi}{16} \approx -0,20 - j0,98; \\ p_{12} &= \sqrt[16]{e^{j25\pi}} = e^{j\frac{25\pi}{16}} = \cos\frac{25\pi}{16} + j\sin\frac{25\pi}{16} \approx 0,20 - j0,98; \\ p_{13} &= \sqrt[16]{e^{j27\pi}} = e^{j\frac{27\pi}{16}} = \cos\frac{27\pi}{16} + j\sin\frac{27\pi}{16} \approx 0,56 - j0,83; \\ p_{14} &= \sqrt[16]{e^{j29\pi}} = e^{j\frac{29\pi}{16}} = \cos\frac{29\pi}{16} + j\sin\frac{29\pi}{16} \approx 0,83 - j0,56; \\ p_{15} &= \sqrt[16]{e^{j31\pi}} = e^{j\frac{31\pi}{16}} = \cos\frac{31\pi}{16} + j\sin\frac{31\pi}{16} \approx 0,98 - j0,20. \end{aligned}$$

3. Знайдемо тепер вираз для функції передачі аналогового фільтра-прототипа $\dot{K}(p)$. Перш за все зауважимо, що для виконання умови стійкості фільтра в якості полюсів, що відповідають функції передачі фільтра $\dot{K}(p)$, із вище наведених відбираємо ті, які розташовані в лівій напівплощині p -площини, тобто мають від'ємну дійсну частину. Сюди відносяться полюси $\{p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9, p_{10}, p_{11}\}$.

Таким чином, функція передачі фільтра-прототипа нижніх частот Баттерворта

$$\dot{K}(p) = \frac{1}{\prod_{k=4}^{11} (p - p_k)}. \quad (6.5)$$

Представимо тепер функцію $\dot{K}(p)$ у вигляді суми простих дробів

$$\dot{K}(p) = \sum_{k=4}^{11} \frac{A_k}{p - p_k},$$

де A_k - коефіцієнт розкладення, що відповідає k -му полюсів. Ці коефіцієнти знаходимо за формулою

$$A_k = \lim_{p \rightarrow p_k} (p - p_k) \dot{K}(p),$$

використовуючи знайдені згідно з формулою (6.4) значення полюсів. Так для A_4 знаходимо

$$\begin{aligned} A_4 &= \lim_{p \rightarrow e^{j\frac{9\pi}{16}}} \left(p - e^{j\frac{9\pi}{16}} \right) \left(\frac{1}{\prod_{k=4}^{11} (p - p_k)} \right) = \frac{1}{\left(e^{j\frac{9\pi}{16}} - e^{j\frac{11\pi}{16}} \right) \left(e^{j\frac{9\pi}{16}} - e^{j\frac{13\pi}{16}} \right)} \times \\ &\times \frac{1}{\left(e^{j\frac{9\pi}{16}} - e^{j\frac{15\pi}{16}} \right) \left(e^{j\frac{9\pi}{16}} - e^{j\frac{17\pi}{16}} \right) \left(e^{j\frac{9\pi}{16}} - e^{j\frac{19\pi}{16}} \right) \left(e^{j\frac{9\pi}{16}} - e^{j\frac{21\pi}{16}} \right)} = \\ &\times \frac{1}{\left(e^{j\frac{9\pi}{16}} - e^{j\frac{23\pi}{16}} \right)} = 0,294 - j0,196. \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо інші коефіцієнти:

$$\begin{aligned} A_5 &= 0,347 + j1,743; \quad A_6 = -4,209 - j0,837; \quad A_7 = -3,568 - j5,34; \\ A_8 &= -3,568 + j5,34; \quad A_9 = -4,209 + j0,837; \quad A_{10} = 0,347 - j1,743; \\ A_{11} &= 0,294 + j0,196. \end{aligned}$$

Із наведених розрахунків видно, що як полюси $\{p_k, k=4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, так і коефіцієнти $\{A_k, k=4, 5, 6,$

$7, 8, 9, 10, 11\}$ утворюють комплексно спряжені пари, тобто

$$p_4 = p_{11}^*; \quad p_5 = p_{10}^*; \quad p_6 = p_9^*; \quad p_7 = p_8^*$$

і

$$A_4 = A_{11}^*; \quad A_5 = A_{10}^*; \quad A_6 = A_9^*; \quad A_7 = A_8^*,$$

де * означає комплексне спряження.

4. Тепер, використовуючи знайдені в п. 2 полюси функції передачі фільтра $\dot{K}(p)$ $\{p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9, p_{10}, p_{11}\}$ та в п. 3 коефіцієнти $\{A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}\}$, можемо записати вираз для імпульсної характеристики аналогового фільтра-прототипа⁵

$$\begin{aligned} h(t) &= \sum_{k=4}^{11} A_k e^{p_k t} = \\ &= (0,294 - j0,196) e^{(-0,20 + j0,98)t} + (0,347 + j1,743) e^{(-0,56 + j0,83)t} + \\ &+ (-4,209 - j0,837) e^{(-0,83 + j0,56)t} + (-3,568 - j5,34) e^{(-0,98 + j0,20)t} + \\ &+ (-3,568 + j5,34) e^{(-0,98 - j0,20)t} + (-4,209 + j0,837) e^{(-0,83 - j0,56)t} + \end{aligned}$$

⁵ Імпульсна характеристика аналогового фільтра-прототипа $h(t)$ є оберненим перетворенням Лапласа його функції передачі $\dot{K}(p)$.

$$+ (0,347 - j1,743)e^{(-0,56-j0,83)t} + (0,294 + j0,196)e^{(-0,20-j0,98)t}.$$

Виконавши дискретизацію імпульсної характеристики $h(t)$ у часі з інтервалом дискретизації $\Delta = \frac{1}{f_a} = \frac{1}{2500} = 4 \cdot 10^{-4}$, с, отримаємо імпульсну характеристику цифрового

НІХ-фільтра, який синтезується:

$$\begin{aligned} h(n\Delta) = h(t)|_{t=n\Delta} &= \sum_{k=4}^{11} A_k e^{p_k n\Delta} = \sum_{k=4}^{11} A_k (e^{p_k \Delta})^n = \\ &= (0,294 - j0,196)(e^{(-0,20+j0,98)\Delta})^n + (0,347 + j1,743)(e^{(-0,56+j0,83)\Delta})^n + \\ &+ (-4,209 - j0,837)(e^{(-0,83+j0,56)\Delta})^n + (-3,568 - j5,34)(e^{(-0,98+j0,20)\Delta})^n + \\ &+ (-3,568 + j5,34)(e^{(-0,98-j0,20)\Delta})^n + (-4,209 + j0,837)(e^{(-0,83-j0,56)\Delta})^n + \\ &+ (0,347 - j1,743)(e^{(-0,56-j0,83)\Delta})^n + (0,294 + j0,196)(e^{(-0,20-j0,98)\Delta})^n, \\ & n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.6)$$

На основі співвідношення (6.6) розраховано і показано на рис. 6.3 ряд значень імпульсної характеристики синтезованого фільтра.

Рис. 6.3. Імпульсна характеристика цифрового ФНЧ

Системну функцію НІХ-фільтра можна знайти, застосувавши z -перетворення до його імпульсної характеристики (6.6), тобто

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n\Delta) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=4}^{11} A_k (e^{p_k \Delta})^n \right) z^{-n} = \sum_{k=4}^{11} A_k \sum_{n=0}^{\infty} (e^{p_k \Delta})^n z^{-n} \\ &= \sum_{k=4}^{11} \frac{A_k}{1 - e^{p_k \Delta} z^{-1}}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Отримана системна функція (6.7) містить комплексні коефіцієнти. Щоб перейти до системної функції з дійсними коефіцієнтами слід скласти попарно складові в правій частині (6.7), що містять комплексно спряжені полюси p_k і коефіцієнти A_k . В результаті отримаємо чотири ланки другого порядку з дійсними коефіцієнтами

$$H_i(z) = \frac{A_k}{1 - e^{p_k \Delta} z^{-1}} + \frac{A_k^*}{1 - e^{p_k^* \Delta} z^{-1}} = \frac{b_{0i} + b_{1i} z^{-1}}{1 + a_{1i} z^{-1} + a_{2i} z^{-2}}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

де коефіцієнти [1]

$$\begin{aligned} b_{0i} &= 2c_i; \quad b_{1i} = -(c_i \alpha_i + d_i \beta_i); \\ a_{1i} &= -2\alpha_i; \quad a_{2i} = \alpha_i^2 + \beta_i^2. \end{aligned}$$

В останніх формулах

$$\begin{aligned} c_i &= \operatorname{Re}[A_k]; \quad d_i = \operatorname{Im}[A_k]; \\ \alpha_i &= \operatorname{Re}[e^{p_k \Delta}]; \quad \beta_i = \operatorname{Im}[e^{p_k \Delta}], \end{aligned}$$

де i - індекс, що відповідає певній парі комплексно спряжених полюсів $\{p_k, k = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, розташованих в лівій напівплощині p -площини, чи коефіцієнтів розкладення функції передачі фільтра на суму простих дробів $\{A_k, k = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Будемо вважати, що індексу $i=1$ відповідає пара комплексно спряжених полюсів p_4 і p_{11} та пара комплексно спряжених коефіцієнтів розкладення A_4 і A_{11} . Аналогічно для інших індексів маємо:

$$i=2 \text{ відповідає } p_5 \text{ і } p_{10} \text{ та } A_5 \text{ і } A_{10};$$

$i = 3$ відповідає p_6 і p_9 та A_6 і A_9 ;

$i = 4$ відповідає p_7 і p_8 та A_7 і A_8 .

Розрахуємо першу ланку другого порядку, що відповідає індексу $i = 1$. Знаходимо

$$c_1 = \operatorname{Re}[A_4] = |\operatorname{Re}[A_{11}]| = 0,294; \quad d_1 = \operatorname{Im}[A_4] = |\operatorname{Im}[A_{11}]| = 0,196;$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \operatorname{Re}[e^{p_4\Delta}] = \operatorname{Re}[e^{p_{11}\Delta}] = \operatorname{Re}[e^{(-0,20\cdot 500 + j0,98\cdot 500)\Delta}] = \operatorname{Re}[e^{(-0,20\cdot 500)\Delta} \times \\ &\times \cos(0,98 \cdot 500 \cdot \Delta) + e^{(-0,20\cdot 500)\Delta} \sin(0,98 \cdot 500 \cdot \Delta)] = e^{(-0,20\cdot 500)\Delta} \times \\ &\times \cos(0,98 \cdot 500 \cdot \Delta) = 0,942; \quad \beta_1 = \operatorname{Im}[e^{p_4\Delta}] = |\operatorname{Im}[e^{p_{11}\Delta}]| = \\ &= e^{(-0,20\cdot 500)\Delta} \sin(0,98 \cdot 500 \cdot \Delta) = 0,187. \end{aligned}$$

Тоді

$$b_{01} = 2c_1 = 2 \cdot 0,294 = 0,588; \quad b_{11} = -(c_1\alpha_1 + d_1\beta_1) = -(0,294 \cdot 0,942 + 0,196 \cdot 0,187) = -0,314;$$

$$a_{11} = -2\alpha_1 = -2 \cdot 0,942 = -1,884; \quad a_{21} = \alpha_1^2 + \beta_1^2 = (0,942)^2 + (0,187)^2 = 0,922$$

і

$$H_1(z) = \frac{0,588 - 0,314z^{-1}}{1 - 1,884z^{-1} + 0,922z^{-1}}. \quad (6.8)$$

Виконавши аналогічні розрахунки для індексів $i = 2, 3, 4$, отримаємо вирази для трьох інших ланок другого порядку:

$$\begin{aligned} H_2(z) &= \frac{0,694 - 0,553z^{-1}}{1 - 1,732z^{-1} + 0,771z^{-1}}; \quad H_3(z) = \frac{-8,418 + 3,464z^{-1}}{1 - 1,684z^{-1} + 0,718z^{-1}}; \\ H_4(z) &= \frac{-7,136 + 2,753z^{-1}}{1 - 1,642z^{-1} + 0,675z^{-1}}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Об'єднавши отримані вирази (6.8), (6.9) в суму, отримаємо остаточний вираз для системної функції цифрового НІХ-фільтра нижніх частот з дійсними коефіцієнтами

$$\begin{aligned} H(z) &= H_1(z) + H_2(z) + H_3(z) + H_4(z) = \\ &= \frac{0,588 - 0,314z^{-1}}{1 - 1,884z^{-1} + 0,922z^{-1}} + \frac{0,694 - 0,553z^{-1}}{1 - 1,732z^{-1} + 0,771z^{-1}} + \frac{-8,418 + 3,464z^{-1}}{1 - 1,684z^{-1} + 0,718z^{-1}} + \frac{-7,136 + 2,753z^{-1}}{1 - 1,642z^{-1} + 0,675z^{-1}}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Системній функції (6.10) відповідає паралельна структура фільтра, зображена на рис. 6.4.

Рис. 6.4. Структурна схема цифрового ФНЧ

На основі отриманої системної функції (6.10) розраховано та зображено на рис. 6.5 карту полюсів синтезованого фільтра

Рис. 6.5. Карта полюсів цифрового ФНЧ

Виконавши в співвідношенні (6.10) заміну змінної $z = e^{j\omega\Delta}$, отримаємо вираз для частотного коефіцієнта передачі цифрового ФВЧ

$$\dot{K}(\omega) =$$

$$= \frac{0,588 - 0,314e^{-j\omega\Delta}}{1 - 1,884e^{-j\omega\Delta} + 0,922e^{-j2\omega\Delta}} + \frac{0,694 - 0,553e^{-j\omega\Delta}}{1 - 1,732e^{-j\omega\Delta} + 0,771e^{-j2\omega\Delta}} +$$

$$+ \frac{-8,418 + 3,464e^{-j\omega\Delta}}{1 - 1,684e^{-j\omega\Delta} + 0,718e^{-j2\omega\Delta}} + \frac{-7,136 + 2,753e^{-j\omega\Delta}}{1 - 1,642e^{-j\omega\Delta} + 0,675e^{-j2\omega\Delta}}.$$

На основі отриманого виразу для частотного коефіцієнта передачі на рис. 6.6 і рис. 6.7 проілюстровані амплітудно-частотна та фазочастотна характеристики відповідно.

Рис. 6.6. АЧХ цифрового ФНЧ

Рис. 6.7. ФЧХ цифрового ФНЧ

Задача 6.2. Розрахувати цифровий фільтр верхніх частот (ФВЧ) методом білінійного z -перетворення, застосовуючи апроксимацію Золотарьова-Кауера, який задовольняє наступним вимогам (див. рис. 6.8):

- частота дискретизації $f_a = 1500$ Гц;
- гранична частота $f_{\text{ад}} = 250$ Гц;
- частота зрізу $f_{\text{сд}} = 350$ Гц;
- допустимі відхилення у смугах пропускання і затримки $\delta_1 = \delta_2 = 0,1$.

Рис. 6.8. Діаграма вимог до цифрового ФВЧ

Розв'язок. 1. Згідно з правилами реактансних перетворень частот перейдемо від ФВЧ до нормованого ФНЧ. Маємо:

- нормована гранична частота ФНЧ

$$\hat{F}_{\text{ад}} = \frac{f_{\text{сд}}}{f_{\text{ад}}} = \frac{350}{250} = 1,4;$$

- нормована частота зрізу ФНЧ

$$\hat{F}_{\text{сд}} = \frac{f_{\text{сд}}}{f_{\text{сд}}} = \frac{350}{350} = 1,0.$$

2. Функція квадрата АЧХ фільтра Чебишова 1-го роду має вигляд

$$|K(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2(\omega)},$$

де $\omega = \frac{\hat{F}}{\hat{F}_{\text{ад}}}$; $C_N(x)$ - поліном Чебишова N -го порядку; ε - параметр, від якого залежить

величина пульсацій, причому

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1 \cdot a_{\text{max}}} - 1}.$$

Враховуючи, що $a_{\text{max}} = -20 \lg(1 - \delta_1) = -20 \lg(1 - 0,1) = 0,915$, то

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1 \cdot 0,915} - 1} = 0,484.$$

3. Знайдемо порядок фільтра N . Згідно з [1]

$$N \geq \frac{\text{Arch}\left(\frac{\sqrt{1-\delta_2^2}}{\varepsilon\delta_2^2}\right)}{\text{Arch}(\omega_{\text{до}})},$$

де $\text{Arch}(x)$ - обернений гіперболічний косинус. Підставивши в останню формулу вихідні дані, отримаємо

$$N \geq \frac{\text{Arch}\left(\frac{\sqrt{1-(0,1)^2}}{0,484 \cdot (0,1)^2}\right)}{\text{Arch}(1,4)} = \frac{3,352}{0,867} \approx 3,866.$$

Отже, приймаємо порядок фільтра $N = 4$.

4. Далі розраховуємо полюси аналогового нормованого ФНЧ.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 7

ПОБОБУДОВА АЛГОРИТМІВ АДАПТИВНОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ

Мета: Ознайомитись з означенням, властивостями та методами побудови алгоритмів адаптивної обробки дискретних сигналів в умовах апріорної невизначеності. Засвоїти на практиці методи розрахунку цифрових систем для їх реалізації.

Завдання: 1. Виконати аналіз оптимального нерекурсивного оцінювання на прикладі адаптивного лінійного суматора другого порядку.

2. Виконати дослідження рекурсивних алгоритмів адаптації на прикладі калманівського оцінювання дискретних випадкових сигналів.

Задача 7.1. Розрахувати адаптивний лінійний суматор на базі СІХ-фільтра другого порядку (див. рис 7.1), якщо на його вході діє адитивна суміш

$$x(n) = s(n) + \xi(n),$$

де $s(n)$ - дискретний гармонічний сигнал

$$s(n) = \sin\left(\frac{\pi}{8}n\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (7.1)$$

$\xi(n)$ - завада, яка представляє собою випадкову послідовність типу білого шуму з нульовим математичним сподіванням ($M\xi(n) = 0$) і дисперсією $M\xi^2(n) = \sigma^2$.

Розв'язок. 1. Розрахунок адаптивного лінійного суматора зводиться до знаходження коефіцієнтів (значень імпульсної характеристики) СІХ-фільтра $\{h_0, h_1, h_2\}$, які б забезпечували мінімум середньоквадратичної похибки

$$M[\varepsilon^2(n)] = M\{[s(n) - \hat{s}(n)]^2\},$$

де $\hat{s}(n)$ - сигнал на виході СІХ-фільтра або оцінка корисного сигналу $s(n)$, яка для СІХ-фільтра другого порядку має вигляд

$$\hat{s}(n) = \sum_{k=0}^2 h_k x(n-k).$$

Тоді

$$\varepsilon(n) = s(n) - \sum_{k=0}^2 h_k x(n-k),$$

а середньоквадратична похибка лінійного оцінювання

$$M[\varepsilon^2(n)] = M\left\{\left[s(n) - \sum_{k=0}^2 h_k x(n-k)\right]^2\right\}. \quad (7.2)$$

Вираз (7.2) описує стандартну поверхню гіперboloїда в трьохвимірному просторі з єдиним мінімумом. Для знаходження значень коефіцієнтів фільтра $\{h_0, h_1, h_2\}$, при яких досягається цей мінімум, потрібно знайти похідні (7.2) по h_k , $k = 0, 1, 2$ і прирівняти їх нулеві. Маємо

$$\frac{\partial M\varepsilon^2(n)}{\partial h_0} = -2M\left[s(n) - \sum_{k=0}^2 h_k x(n-k)\right]x(n),$$

$$\frac{\partial M\varepsilon^2(n)}{\partial h_1} = -2M\left[s(n) - \sum_{k=0}^2 h_k x(n-k)\right]x(n-1),$$

$$\frac{\partial M\varepsilon^2(n)}{\partial h_2} = -2M\left[s(n) - \sum_{k=0}^2 h_k x(n-k)\right]x(n-2)$$

і

$$M\left[s(n) - \sum_{k=0}^2 h_k x(n-k)\right]x(n) = 0,$$

$$\begin{aligned} M\left[s(n) - \sum_{k=0}^2 h_k x(n-k)\right]x(n-1) &= 0, \\ M\left[s(n) - \sum_{k=0}^2 h_k x(n-k)\right]x(n-2) &= 0. \end{aligned}$$

Розкриємо квадратні дужки в останній системі рівнянь, врахувавши при цьому властивості математичного сподівання. Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} M[s(n)x(n)] &= \sum_{k=0}^2 h_k M[x(n-k)x(n)], \\ M[s(n)x(n-1)] &= \sum_{k=0}^2 h_k M[x(n-k)x(n-1)], \\ M[s(n)x(n-2)] &= \sum_{k=0}^2 h_k M[x(n-k)x(n-2)]. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Розрахуємо математичні сподівання, записані лівих частинах системи рівнянь (7.3).

$$\begin{aligned} M[s(n)x(n)] &= M\left[\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right) + \xi(n)\right)\right] = M\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{8}n\right)\right) + \\ &+ M\left(\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)\right)M\xi(n) = \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{15} \sin^2\left(\frac{\pi}{8}n\right) = 0,5. \end{aligned} \quad (7.4)$$

При розрахунках в (7.4) врахована некорельованість сигналу $s(n)$ і процесу $\xi(n)$ та рівність нулю математичного сподівання останнього. Окрім того, усереднення квадрату сигналу Mx^2 здійснюється на інтервалі часу, що дорівнює періоду колювання (7.1). Оскільки таке колювання містить 16 відліків на періоді, то в правій частині співвідношення (7.4) розглядається сума за дискретним нормованим часом від $n=0$ до $n=15$.

Виконуючи аналогічні розрахунки, знаходимо

$$M[s(n)x(n-1)] \approx 0,462 \quad \text{і} \quad M[s(n)x(n-2)] \approx 0,3536.$$

Отримані значення складають вектор-стовпчик взаємної кореляції між сигналом $s(n)$, що оцінюється, та відліками вхідного колювання $x(n)$, тобто

$$\mathbf{P}^T = [M[s(n)x(n)] \quad M[s(n)x(n-1)] \quad M[s(n)x(n-2)]] = [0,5 \quad 0,462 \quad 0,3536].$$

Знайдемо тепер математичні сподівання в правих частинах системи рівнянь (7.3).

$$Mx^2(n) = M\left[\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right) + \xi(n)\right]^2 = M\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{8}n\right)\right) + 2M\left(\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)\right)M\xi(n) + M\xi^2(n) = 0,5 + \sigma^2. \quad (7.5)$$

Аналогічно

$$\left. \begin{aligned} Mx^2(n-1) &= 0,5 + \sigma^2 \quad \text{і} \quad Mx^2(n-2) = 0,5 + \sigma^2 \\ M[x(n-1)x(n)] &= M[x(n)x(n-1)] \approx 0,462 \\ M[x(n-2)x(n)] &= M[x(n)x(n-2)] \approx 0,3536 \\ M[x(n-2)x(n-1)] &= M[x(n-1)x(n-2)] \approx 0,462 \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Обчислені значення математичних сподівань в (7.5) і (7.6) утворюють автокореляційну квадратну матрицю відліків вхідного сигналу

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} Mx^2(n) & M[x(n-1)x(n)] & M[x(n-2)x(n)] \\ M[x(n)x(n-1)] & Mx^2(n-1) & M[x(n-2)x(n-1)] \\ M[x(n)x(n-2)] & M[x(n-1)x(n-2)] & Mx^2(n-2) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0,5 + \sigma^2 & 0,462 & 0,3536 \\ 0,462 & 0,5 + \sigma^2 & 0,462 \\ 0,3536 & 0,462 & 0,5 + \sigma^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Позначимо через \mathbf{H} вектор-стовпчик коефіцієнтів СІХ-фільтра, тобто

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}.$$

Тоді систему рівнянь (7.3), з урахуванням введених позначень можна записати у векторно-матричній формі:

$$\mathbf{P}^T = \mathbf{H}^T \mathbf{R}. \quad (7.7)$$

Співвідношення (7.7) носить назву матричного рівняння Вінера-Хопфа, розв'язок якого і дає оптимальні за критерієм МНК значення коефіцієнтів СІХ-фільтра $\mathbf{H}_0^T = [h_{00} \ h_{01} \ h_{02}]$, що розглядається, тобто

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P},$$

де \mathbf{R}^{-1} - матриця, обернена до матриці \mathbf{R} .

Отже потрібно знайти обернену матрицю \mathbf{R}^{-1} . Для цього спочатку слід визначити транспоновану матрицю \mathbf{R}^T . Але оскільки матриця \mathbf{R} є симетричною, то $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}$ і можна відразу перейти до другого етапу, а саме, замінити кожен елемент в матриці $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}$ визначником, отриманим в результаті викреслювання рядка і стовпчика, на якому розташований цей елемент. При цьому, якщо елемент матриці розташований на перетині рядка і стовпчика, для яких сума їх номерів складає непарне число, то перед відповідним визначником слід поставити знак «-». Тоді отримуємо

$$\begin{bmatrix} (0,5 + \sigma^2)^2 - & -0,462(0,5 + \sigma^2) + & (0,462)^2 - \\ -(0,462)^2 & +0,462 \cdot 0,3536 & -0,3536(0,5 + \sigma^2) \\ -0,462(0,5 + \sigma^2) + & (0,5 + \sigma^2)^2 - & -0,462(0,5 + \sigma^2) + \\ +0,462 \cdot 0,3536 & -(0,3536)^2 & +0,462 \cdot 0,3536 \\ (0,462)^2 - & -0,462(0,5 + \sigma^2) + & (0,5 + \sigma^2)^2 - \\ -0,3536(0,5 + \sigma^2) & +0,462 \cdot 0,3536 & -(0,462)^2 \end{bmatrix},$$

або, після розкриття дужок і виконання арифметичних дій,

$$\begin{bmatrix} 0,036556 + \sigma^2 + \sigma^4 & -0,0676368 - 0,462\sigma^2 & 0,036644 - 0,3536\sigma^2 \\ -0,0676368 - 0,462\sigma^2 & 0,12496761 + \sigma^2 + \sigma^4 & -0,1076368 - 0,462\sigma^2 \\ 0,036644 - 0,3536\sigma^2 & -0,1076368 - 0,462\sigma^2 & 0,036556 + \sigma^2 + \sigma^4 \end{bmatrix}$$

На третьому етапі знаходимо визначник матриці \mathbf{R} :

$$|\mathbf{R}| = (0,5 + \sigma^2) \left[(0,5 + \sigma^2)^2 - (0,462)^2 \right] - 0,462 \left[0,462(0,5 + \sigma^2) - 0,462 \times \right. \\ \left. \times 0,3536 \right] + 0,3536 \left[(0,462)^2 - 0,3536(0,5 + \sigma^2) \right] = 0,0375 + 0,198\sigma^2 + 1,5\sigma^4 + \sigma^6.$$

Тепер можна записати вираз для оберненої матриці

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{0,0375 + 0,198\sigma^2 + 1,5\sigma^4 + \sigma^6} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0,036556 + \sigma^2 + \sigma^4 & -0,0676368 - 0,462\sigma^2 & (0,036644 - \\ & & -0,3536\sigma^2) \\ -0,0676368 - 0,462\sigma^2 & 0,12496761 + \sigma^2 + \sigma^4 & (-0,1076368 - \\ & & -0,462\sigma^2) \\ 0,036644 - 0,3536\sigma^2 & -0,1076368 - 0,462\sigma^2 & (0,036556 + \sigma^2 + \\ & & + \sigma^4) \end{bmatrix} \text{ та знайти значення}$$

оптимальних коефіцієнтів СІХ-фільтра $\mathbf{H}_0^T = [h_{00} \ h_{01} \ h_{02}]$

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P} = \frac{1}{0,0375 + 0,198\sigma^2 + 1,5\sigma^4 + \sigma^6} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \begin{bmatrix} 0,036556 + \sigma^2 + \sigma^4 & -0,0676368 - 0,462\sigma^2 & (0,036644 - \\ & & -0,3536\sigma^2) \\ -0,0676368 - 0,462\sigma^2 & 0,12496761 + \sigma^2 + \sigma^4 & (-0,1076368 - \\ & & -0,462\sigma^2) \\ 0,036644 - 0,3536\sigma^2 & -0,1076368 - 0,462\sigma^2 & (0,036556 + \sigma^2 + \\ & & + \sigma^4) \end{bmatrix} \times \times \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,462 \\ 0,3536 \end{bmatrix} = \\
& \frac{1}{0,0375 + 0,198\sigma^2 + 1,5\sigma^4 + \sigma^6} \times \\
& \times \begin{bmatrix} -1,28832 \cdot 10^{-5} + 0,83847696\sigma^2 + 0,5\sigma^4 \\ -0,01414373666 + 0,5296368\sigma^2 + 0,462\sigma^4 \\ -0,01848 - 0,036644\sigma^2 + 0,3536\sigma^4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$